MÉMOIRE DE MAÎTRISE

Construction d'opérateurs sur un espace de Hilbert
ou
Déformation des relations de commutation canoniques

Stéphane Benoist[1] et Igor Kortchemski[2]

Sous la direction de Marc Rosso

École Normale Supérieure, 75005 Paris, France

Juin 2008

Résumé

Dans ce mémoire, nous nous intéressons à la question suivante : étant donné un réel q, existe-t-il un espace de Hilbert $\mathcal{E}$ muni d'opérateurs $\{a_i, a_i^*,\, i \in \mathbb{N}\}$ vérifiant :

$$\forall i, j \in \mathbb{N}, \qquad a_i a_j^* - q a_j^* q_i = \delta_{i,j}?$$

Dans le cas $|q| = 1$, la réponse est *oui*. Ce cas est bien connu : il intervient dans l'étude de systèmes constitués par un grand nombre de particules indiscernables en mécanique quantique. Plus généralement, dans le cas $|q| \leq 1$, la réponse est *oui*. Nous étudions quatre preuves de ce résultat, qui abordent le problème sous divers angles en utilisant des domaines variés des mathématiques : théorie des espaces d'opérateurs, théorie des groupes et de leurs représentations, combinatoire, algèbre linéaire et théorie des probabilités.

[1] stephane.benoist@ens.fr
[2] igor.kortchemski@ens.fr

Introduction

Les relations de commutation généralisées de la forme $a_i a_j^* - q a_j^* a_i = \delta_{ij}$, où $q \in \mathbb{R}$ et où les a_i sont des opérateurs linéaires définis sur un espace de Hilbert, ont été introduites par trois physiciens : Bourret et Frisch en 1970 [1], et indépendamment par Greenberg en 1991 [2]. Ils ont étudié l'interprétation physique de ces relations, tout en admettant leur *existence*. Ainsi, la question suivante se pose :

Question. Soit $q \in \mathbb{R}$. Existe-t-il un espace de Hilbert $\mathcal{E}$ muni d'opérateurs $\{a_i, i \in \mathbb{N}\}$ définis sur $\mathcal{E}$ tels que la condition suivante soit vérifiée :

$$\forall i, \forall j, \quad a_i a_j^* - q a_j^* a_i = \delta_{ij}. \tag{1}$$

La motivation qui se cache derrière cette question est la suivante. Les relations :

$$a_i a_j^* - a_j^* a_i = \delta_{ij} \qquad \text{et} \qquad a_i a_j^* + a_j^* a_i = \delta_{ij}$$

sont bien connues[3]. Peut-on alors passer « continûment » de la première relation à la deuxième grâce à une déformation ? L'introduction du paramètre q permet de caresser cet espoir.

Fivel [3] a démontré que pour $|q| \leq 1$, la réponse à la question d'existence est affirmative. Indépendamment, Zagier [4] ainsi que Bozejko et Speicher [5] ont obtenu le même résultat. Un peu plus tard, Bozejko et Speicher [6] puis Speicher [7] en ont donné deux nouvelles preuves.

L'objectif de ce mémoire est d'étudier ces quatre derniers articles [4, 5, 6, 7] et de voir en quoi ils sont semblables. Nous avons tenté d'expliquer l'intuition et les idées qui sont sous-jacentes aux différents arguments utilisés. Nous avons omis une preuve technique de [4], rendu rigoureuses certaines preuves et détaillé quelques démonstrations.

Présentons rapidement les trois différentes approches utilisées.

[4] Partant d'un vecteur Ω, nous obtenons naturellement un $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathcal{E}$ en faisant agir sur Ω de manière formelle les opérateurs a_i et a_i^* de toutes les manières possibles. Il faut alors munir cet espace vectoriel d'une structure hilbertienne en construisant un produit scalaire (puis en complétant). Nous verrons que les relations (1) et le fait que a_i et a_i^* doivent être adjoints déterminent complètement le produit scalaire. Ainsi, une unique forme hermitienne B apparaît comme candidate pour être le produit scalaire de $\mathcal{E}$. Il suffit alors de vérifier que B est bien définie positive. C'est précisément dans ce dernier point que réside la difficulté.

[5, 6] Nous construisons facilement un espace de Hilbert $\mathcal{F}$ et des opérateurs a_i et a_i^* vérifiant les relations (1), mais tels que a_i et a_i^* ne sont pas adjoints pour le produit scalaire de $\mathcal{F}$. Il s'agit alors de définir un nouveau produit scalaire pour lequel a_i et a_i^* vont être adjoints.

[7] Partant d'opérateurs vérifiant les relations de commutation canoniques ($q = \pm 1$), nous construisons $\mathcal{E}$, ainsi que a_i, a_i^*, comme « limite » des premiers opérateurs. La forme sesquilinéaire hermitienne « limite » sur $\mathcal{E}$ va alors être limite simple de produits scalaires, donc va nécessairement être positive. La difficulté n'est donc plus l'étude de la positivité de quelque chose. Elle survient lorsqu'on veut montrer que cette « limite » existe.

[3] Elles interviennent dans l'étude de systèmes quantiques constitués par un grand nombre de particules indiscernables [11].

Ce mémoire est organisé de la manière suivante. Dans la première section, nous expliquons l'origine des « relations de commutation canoniques ». Dans les parties 2,3,4 et 5 nous étudions les quatre preuves du résultat qui nous intéresse.

Table des matières

1 Relations de commutation canoniques et seconde quantification

Nous commençons par expliquer brièvement l'origine des « relations de commutation canoniques ». Celles-ci apparaissent dans le cadre du formalisme de la seconde quantification, qui est adapté à l'étude de systèmes physiques quantiques constitués par un grand nombre de particules indiscernables, en particulier *infini*. Pour cette partie exclusivement, nous supposons que le lecteur possède des notions de base en mécanique quantique.

1.1 Postulat de symétrisation

Considérons un système physique constitué de N particules. Il s'agit de comprendre ce qui se passe lorsqu'on échange des particules. À cet effet, notons α_i l'ensemble des états *individuels* accessibles par une particule. Numérotons les de 1 à N. Une base de l'espace de Hilbert complexe décrivant ce système est alors donnée par $\{|1:\alpha_1; 2:\alpha_2; \ldots; N:\alpha_N\rangle\}$, où $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ parcourent l'ensemble des états individuels accessibles et où $i:\alpha_i$ signifie que la i-ième particule se trouve dans l'état α_i. Pour[4] $\sigma \in \mathfrak{S}_N$, on définit l'opérateur d'échange P_σ par :

$$P_\sigma|1:\alpha_1; 2:\alpha_2; \ldots; N:\alpha_N\rangle = |1:\alpha_{\sigma(1)}; 2:\alpha_{\sigma(2)}; \ldots; N:\alpha_{\sigma(N)}\rangle.$$

En notant ϵ_σ la signature de la permutation σ, on définit également les opérateurs *symétriseur* et *antisymétriseur* respectivement par :

$$S = \frac{1}{N!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_N} P_\sigma \qquad \text{et} \qquad A = \frac{1}{N!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_N} \epsilon_\sigma P_\sigma.$$

Le lecteur peut, s'il le souhaite, vérifier que S et A sont hermitiens, que $P_\sigma S = S$ et $P_\sigma A = \epsilon_\sigma A$, que S et A sont des projecteurs et enfin que $SA = AS = 0$. Un état $|\psi\rangle$ est dit *totalement symétrique* (respectivement *totalement antisymétrique*) s'il est dans l'espace vectoriel $\mathrm{im}(S)$ (respectivement $\mathrm{im}(A)$). Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le :

Postulat 1.1 (de symétrisation)**.** Lorsqu'un système comprend plusieurs particules identiques, seuls certains kets de son espace des états peuvent décrire ses états physiques : les kets physiques sont, suivant la nature des particules, soit complètement symétriques, soit complètement antisymétriques par rapport aux permutations de ces particules. On appelle *bosons* les particules pour lesquelles les kets physiques sont symétriques, *fermions* celles pour lesquelles ils sont antisymétriques.

Une conséquence fondamentale de ce résultat est la suppression de la dégénérescence d'échange. Autrement dit, en termes moins techniques, ce postulat lève toute ambiguïté sur le ket représentant un état physique dans un système comportant des particules identiques. Plus précisément, si $|u\rangle$ est un ket susceptible de décrire mathématiquement un état physique bien déterminé contenant des particules identiques, $P_\sigma|u\rangle$, qui est a priori un ket différent, pourra le décrire aussi. Or, d'après le postulat, $|u\rangle$ est soit totalement symétrique, soit totalement antisymétrique. De plus, $S|u\rangle = SP_\sigma|u\rangle$ et $A|u\rangle = \epsilon_\sigma AP_\sigma|u\rangle$. Cela signifie que les projections sur $\mathrm{im}(S)$ ou $\mathrm{im}(A)$ des divers kets susceptibles de décrire l'état $|u\rangle$ sont colinéaires. D'après le postulat de

[4] On note $\mathfrak{S}_n$ l'ensemble des permutations de longueur n.

symétrisation, on pourra donc parler *du* ket associé à l'état physique envisagé : c'est $S|u\rangle$ pour des bosons et $A|u\rangle$ pour des fermions. Cet état sera appelé *ket physique*.

Cette discussion permet de construire un ket physique correspondant à un état physique défini d'un système de N particules identiques de la manière suivante :

- On numérote arbitrairement les particules, et on construit le ket $|u\rangle$ correspondant à l'état physique envisagé et aux numéros ainsi donnés aux particules.
- On applique S ou A à $|u\rangle$ suivant que les particules sont des bosons ou des fermions.
- On norme le ket ainsi obtenu.

Nous renvoyons le lecteur au chapitre XIV du manuel de Mécanique Quantique [11] pour des exemples et une discussion plus poussée.

1.2 États complètement symétriques ou antisymétriques

Illustrons notre règle de construction en donnant la forme générique d'un système de N bosons ou de N fermions. Cela permettra d'avoir une notation pratique et simplifiée pour les états complètement symétriques et antisymétriques.

Traitons d'abord le cas des fermions. Commençons donc par numéroter les particules et représentons notre état par $|1:\alpha_1;2:\alpha_2;\ldots,N:\alpha_N\rangle$. On applique ensuite A, et on norme. On obtient en définitive :

$$\sqrt{N!}\,A|1:\alpha_1;2:\alpha_2;\ldots,N:\alpha_N\rangle. \tag{2}$$

Remarquons que s'il existe $i \neq j$ tels que $\alpha_i = \alpha_j$, alors ce ket est nul. Le lecteur attentif aura remarqué que nous venons de retrouver le principe de Pauli : deux fermions ne peuvent pas se trouver dans deux états identiques. Nous noterons ainsi par la suite $|\alpha_1;\alpha_2;\ldots;\alpha_N\rangle$ le ket physique apparaissant dans (2) (noter que l'ordre a son importance : $|\alpha_1;\alpha_2;\ldots;\alpha_N\rangle = -|\alpha_2;\alpha_1;\ldots;\alpha_N\rangle$). On pourra retenir que pour les fermions, l'énumération des états individuels occupés caractérise l'état physique.

Traitons maintenant le cas des bosons. Comme précédemment, on numérote les particules, et on représente notre état par $|1:\alpha_1;2:\alpha_2;\ldots,N:\alpha_N\rangle$. On applique ensuite S, et on norme. On obtient en définitive :

$$\sqrt{\frac{N!}{n_{\alpha_1}!n_{\alpha_2}!\cdots}}S|1:\alpha_1;2:\alpha_1;\ldots,n_{\alpha_1}:\alpha_1;n_{\alpha_1}+1:\alpha_2;\cdots n_{\alpha_1}+n_{\alpha_2}:\alpha_2;\ldots\rangle, \tag{3}$$

où l'on a noté n_{α_i} le nombre de particules dans l'état α_i. Ce ket physique sera noté dans la suite $|n_{\alpha_1},n_{\alpha_2},\ldots\rangle$, avec $\sum_i n_{\alpha_i} = N$. On pourra retenir que pour les bosons, les nombres d'occupation caractérisent l'état physique.

1.3 Seconde quantification

Définissons d'abord l'espace de Fock, espace de Hilbert dans lequel nous allons travailler. L'espace de Fock $\mathcal{E}$ est l'espace défini par[5] :

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}^{(0)} \oplus \mathcal{E}^{(1)} \oplus \cdots \oplus \mathcal{E}^{(N)} \oplus \cdots , \tag{4}$$

où

- $\mathcal{E}^{(0)}$ est une espace de dimension 1, engendré par un vecteur noté $|0\rangle$, appelé *vide de particules* (ce vecteur est non nul).
- L'espace $\mathcal{E}^{(N)}$ est l'espace de Hilbert à N particules engendré par les états complètement symétriques ou antisymétriques, ou encore, en reprenant les notations précédentes, par les vecteurs $|n_{\alpha_1}, n_{\alpha_2}, \ldots\rangle$ pour les bosons, et $|\alpha_1; \alpha_2; \ldots ; \alpha_N\rangle$ pour les fermions.

Ainsi, le nombre de particules (qui peut éventuellement être infini) d'un état de l'espace de Fock n'est pas fixé. On introduit donc naturellement des opérateurs de création et d'annihilation qui ajoutent ou enlèvent des particules.

1.3.1 Cas des bosons

Pour les *bosons*, l'opérateur d'annihilation de l'état individuel μ est défini par :

$$\begin{aligned} a_\mu : \mathcal{E}^{(N)} &\rightarrow \mathcal{E}^{(N-1)} \\ |n_{\alpha_1}, n_{\alpha_2}, \ldots, n_\mu, \ldots\rangle &\mapsto \begin{cases} \sqrt{n_\mu}|n_{\alpha_1}, n_{\alpha_2}, \ldots, n_\mu - 1, \ldots\rangle & \text{si } n_\mu > 0 \\ 0 & \text{si } n_\mu = 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

et l'opérateur de création de l'état individuel μ par :

$$\begin{aligned} a_\mu^* : \mathcal{E}^{(N)} &\rightarrow \mathcal{E}^{(N+1)} \\ |n_{\alpha_1}, n_{\alpha_2}, \ldots, n_\mu, \ldots\rangle &\mapsto \sqrt{n_\mu + 1}|n_{\alpha_1}, n_{\alpha_2}, \ldots, n_\mu + 1, \ldots\rangle. \end{aligned}$$

Les pré-facteurs sont introduits pour des raisons que nous ne développerons pas ici. On montre alors facilement que a_μ et a_μ^* sont adjoints et que les relations de commutation suivantes sont satisfaites :

$$a_\mu a_\nu - a_\nu a_\mu = 0, \quad a_\mu^* a_\nu^* - a_\nu^* a_\mu^* = 0, \quad a_\nu a_\mu^* - a_\mu^* a_\nu = \delta_{\mu,\nu}. \tag{5}$$

1.3.2 Cas des fermions

Pour les *fermions*, ces opérateurs sont définis différemment. En effet, l'opérateur d'annihilation de l'état individuel μ est défini par :

$$\begin{aligned} a_\mu : \mathcal{E}^{(N)} &\rightarrow \mathcal{E}^{(N-1)} \\ |\mu, \alpha, \beta, \ldots\rangle &\mapsto |\alpha, \beta, \ldots\rangle \\ |\alpha, \beta, \ldots\rangle &\mapsto 0 \text{ si } \mu \text{ n'est pas peuplé.} \end{aligned}$$

[5] Il y a toujours une ambiguïté lors de la définition de l'espace de Fock : soit on parle des combinaisons linéaires finies d'éléments de $\bigcup_{n\geq 0} \mathcal{E}^{\otimes n}$ (qui ne forment pas un espace de Hilbert), soit du complété de cet espace par rapport au produit scalaire canonique (qui est bien un espace de Hilbert).

et l'opérateur de création de l'état individuel μ par :

$$\begin{array}{rcl} a_\mu^* : \mathcal{E}^{(N)} & \rightarrow & \mathcal{E}^{(N+1)} \\ |\alpha, \beta, \ldots\rangle & \mapsto & |\mu, \alpha, \beta, \ldots\rangle \text{ si } \mu \text{ n'est pas peuplé} \\ |\alpha, \beta, \ldots, \mu, \ldots\rangle & \mapsto & 0, \end{array}$$

ce qui est cohérent avec le principe de Pauli. Rappelons que l'ordre a son importance dans l'énumération des états (par exemple $|\alpha, \beta, \ldots\rangle = -|\beta, \alpha, \ldots\rangle$). On montre alors facilement que a_μ et a_μ^* sont adjoints et que les relations d'anti-commutation suivantes sont satisfaites :

$$a_\mu a_\nu + a_\nu a_\mu = 0, \quad a_\mu^* a_\nu^* + a_\nu^* a_\mu^* = 0, \quad a_\nu a_\mu^* + a_\mu^* a_\nu = \delta_{\mu,\nu}. \tag{6}$$

Les dernières égalités des équations (5) et (6) forment les « relations de commutation canoniques » : $a_\nu a_\mu^* - a_\mu a_\nu^* = \delta_{\mu,\nu}$ pour les bosons et $a_\nu a_\mu^* + a_\mu a_\nu^* = \delta_{\mu,\nu}$ pour les fermions. Notons que dans les deux cas :

$$a_\mu |0\rangle = 0. \tag{7}$$

Pour conclure, tentons d'expliquer le terme « seconde quantification ». « Seconde », parce que ce formalisme permet de traiter le cas d'un système comportant un nombre infini de particules (point de départ de la théorie quantique des champs). « Quantification », parce qu'en quelque sorte nous avons réussi à quantifier et à décrire l'espace de Fock.

« Ce que l'on conçoit bien s'énonce clairement,
et les mots pour le dire arrivent aisément »
N. Boileau et F. Paulin

2 « Realizability of a Model in Infinite Statistics », d'après Zagier

2.1 Introduction et structure de la preuve

Nous commençons par donner la preuve de Zagier [4]. Celle-ci est peut être la plus naturelle, et a l'avantage de donner la formule pour le déterminant d'une certaine matrice afin de montrer qu'il est non nul. Le résultat principal de cet article est le suivant :

Théorème 2.1. *Soit $q \in \mathbb{R}$. Pour une permutation*[6] *π, on note $I(\pi)$ son nombre d'inversions. Soit $A_n(q)$ la matrice de taille $n! \times n!$ définie par $A_n(q) = [q^{I(\pi^{-1}\sigma)}]_{\pi,\sigma \in \mathfrak{S}_n}$. Alors :*

$$\det A_n(q) = \prod_{k=1}^{n-1} (1 - q^{k^2+k})^{\frac{n!(n-k)}{k^2+k}}.$$

Pour $|q| < 1$, nous verrons comment ce théorème implique l'existence d'un espace de Hilbert $\mathcal{E}$ muni d'opérateurs[7] $\{a_i, i \in \mathbb{N}\}$ définis sur *un sous-espace dense*[8] de $\mathcal{E}$ et d'un vecteur $|0\rangle \in \mathcal{E}$ tels que les deux conditions suivantes soient vérifiées[9] :

$$\forall i, \forall j, \qquad a_i a_j^* - q a_j^* a_i = \delta_{ij}, \tag{8}$$
$$\forall i, \qquad a_i|0\rangle = 0. \tag{9}$$

Présentons d'abord la structure de la preuve.

Partant d'un vecteur $|0\rangle$, nous obtenons naturellement un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E en faisant agir sur $|0\rangle$ de manière formelle les opérateurs a_i et a_i^* de toutes les manières possibles. Il faut alors munir cet espace vectoriel d'une structure hilbertienne en le munissant d'un produit scalaire (puis en complétant).

Nous verrons que les relations apparaissant dans (8) et le fait que a_i et a_i^* doivent être adjoints déterminent complètement le produit scalaire. Ainsi, une unique forme hermitienne B apparaît comme candidat pour être le produit scalaire de $\mathcal{E}$. Il suffit alors de vérifier que B est bien définie positive. C'est précisément dans ce dernier point que réside la difficulté et où le théorème 2.1 intervient.

[6] On note $\mathfrak{S}_n$ l'ensemble des permutations de longueur n.

[7] Par opérateur, nous entendons application $\mathbb{C}$-linéaire.

[8] Zagier omet, à tort, le terme « un sous-espace dense » : les opérateurs a_i ne sont pas continus a priori. Nous verrons même que dans le cas $q = 1$, ils ne sont pas continus.

[9] Pour comprendre d'où vient la deuxième condition, voir (7).

2.2 Construction d'une $*$-algèbre $\mathcal{A}$

Nous donnons d'abord quelques définitions afin de pouvoir préciser ce que signifie « agir de manière formelle ».

Définition 2.2. Un *alphabet* A n'est rien d'autre qu'un ensemble. L'ensemble des *mots* sur l'alphabet A, noté M, est l'ensemble des n-uplets d'éléments de A, où n est un entier naturel, éventuellement nul. On note e le mot vide correspondant à n=0. La concaténation des mots, notée $\bullet$, est une loi associative sur M, dont e est élément neutre.

Exemple 2.3. Par exemple, $TW \bullet SB = TWSB$.

Pour des raisons évidentes, l'écriture du symbole $\bullet$ sera omise. Dans toute la suite de cette partie, nous considérons l'alphabet :

$$A = \{a_i |\ i \in \mathbb{N}\} \cup \{a_i^* |\ i \in \mathbb{N}\}.$$

Notons que la structure d'espace vectoriel est insuffisante pour notre problème, puisque nous souhaitons avoir une notion d'adjoint. Nous verrons que c'est la structure d'$*-$algèbre qui est adaptée à notre problème.

Définition 2.4. Une $*-$*algèbre* A est une $\mathbb{C}$-algèbre munie d'un opérateur involutif $*$ telle que :

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}, \forall a, b \in A, \quad (\lambda a + \mu b)^* = \overline{\lambda} a^* + \overline{\mu} b^* \text{ et } (ab)^* = b^* a^*.$$

Proposition 2.5. *Il existe une $*-$algèbre unitaire contenant les mots de M.*

Preuve. Considérons d'abord $\mathcal{A}$, la $\mathbb{C}$-algèbre engendrée par M. C'est par définition l'ensemble des combinaisons linéaires complexes formelles finies de mots de M, possédant une structure évidente d'espace vectoriel complexe.

Munissons maintenant $\mathcal{A}$ d'une structure d'$*-$algèbre unitaire, d'élément neutre e, le mot vide. Il existe un produit naturel sur $\mathcal{A}$ qui prolonge la concaténation des mots : si $\alpha = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i m_i$ et $\beta = \sum_{j=1}^{l} \mu_j n_j$ où les m_i et les n_j sont des mots de M, alors :

$$\alpha\beta = \alpha \bullet \beta = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} \lambda_i \mu_j \ m_i \bullet n_j$$

On munit alors $\mathcal{A}$ d'un opérateur $*$ antilinéaire ($(\lambda\alpha)^* = \overline{\lambda}(\alpha)^*$) et vérifiant $(\alpha\beta)^* = \beta^*\alpha^*$. Pour cela, on définit d'abord l'action $*$ sur l'alphabet, de telle sorte que les lettres a_i et a_i^* soient images l'une de l'autre. L'action de $*$ sur les mots se définit ensuite en imposant $(\alpha\beta)^* = \beta^*\alpha^*$. On prolonge finalement $*$ à tout $\mathcal{A}$ par antilinéarité.

$\blacksquare$

Exemple 2.6. Par exemple, $(a_5^* a_3 a_4 a_6^*)^* = a_6 a_4^* a_3^* a_5$.

Finissons par une dernière définition.

Définition 2.7. On appelle $\mathcal{I}$ l'idéal bilatère de $\mathcal{A}$ engendré par les éléments

$$R_{ij} = a_i a_j^* - q a_j^* a_i - \delta_{ij}.$$

2.3 Construction d'une forme sesquilinéaire B sur l'espace vectoriel E

Rappelons tout d'abord l'objectif final de tout ce travail : obtenir un espace de Hilbert $\mathcal{E}$ muni de certains opérateurs a_i vérifiant les relations de commutation $R_{ij} = 0$, et annulant un certain vecteur $|0\rangle$. On va donc définir la forme sesquilinéaire B en gardant en tête ces deux contraintes, et en s'assurant que a_i et a_i^* soient adjoints par B. Commençons par expliquer ce que nous ferons.

Remarque 2.8. Supposons le problème résolu, et calculons le produit scalaire de l'élément $a_1^* a_2^* |0\rangle$ avec $a_2^* a_1^* |0\rangle$. Il s'agit donc de calculer[10] $\langle 0 | a_2 a_1 a_2^* a_1^* | 0 \rangle$. Vu que $\langle 0 | a_i^* = 0$ et $a_i | 0 \rangle = 0$, on procède de la manière suivante :

- en utilisant les relations de commutation $R_{ij} = 0$, on met tous les opérateurs étoilés à gauche et tous les opérateurs non étoilés à droite.
- on effectue les simplifications possibles grâce aux relations $\langle 0 | a_i^* = 0$ et $a_i | 0 \rangle = 0$.

Par exemple :

$$\begin{aligned}
\langle 0 | a_2 a_1 a_2^* a_1^* | 0 \rangle &= q \langle 0 | a_2 a_2^* a_1 a_1^* | 0 \rangle \\
&= q \langle 0 | (1 + q a_2^* a_2)(1 + q a_1^* a_1) | 0 \rangle \\
&= q \langle 0 | 0 \rangle \\
&= q.
\end{aligned}$$

Ce qui suit vise à rendre cela rigoureux (Zagier se limite à l'argument intuitif qui précède). En particulier, nous précisons dans quel espace les égalités précédentes ont lieu.

Définition 2.9. On note M' l'ensemble des mots de la forme $m = m_1 m_2$, où m_1 ne contient que des lettres étoilées, et m_2 ne contient que des lettres non étoilées[11].

Lemme 2.10. *Il existe une forme linéaire L sur $\mathcal{A}$ telle que, pour tout mot $m \in M$, $L(m)$ est un polynôme à coefficients réels*[12] .

Intuitivement, on procède comme dans la remarque 2.8 : on transforme les mots en utilisant les relations de commutations R_{ij}. Plus précisément, à tout mot M nous allons associer un mot du sous-ensemble M'. Nous définirons alors notre forme linéaire L sur M'. Nous avons d'abord besoin de la définition suivante.

Définition 2.11. On définit T, opérateur linéaire (dit de transformation) sur $\mathcal{A}$, en précisant son action sur les mots de la manière suivante. Soit un mot $m \in M$. De deux choses l'une :

- Soit $m \in M'$, auquel cas on pose $T(m) = m$.
- Sinon, on peut écrire $m = m_1 a_i a_j^* m_2$, où $m_2 \in M'$. On pose alors :

$$T(m_1 a_i a_j^* m_2) = q m_1 a_j^* a_i m_2 + \delta_{ij} m_1 m_2.$$

On remarque que pour tout élément m de M, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $T^{n_0}(m) = T^{n_0+1}(m)$. On définit alors $T_g(m) = T^{n_0}(m)$. T_g est un opérateur linéaire, que nous désignerons par le doux nom d'opérateur de transformation globale. On voit que l'image de T_g est incluse dans le sous-espace vectoriel engendré par M'.

[10] On note $\langle 0|$ la forme linéaire $|0\rangle^t$.

[11] Ainsi, en continuant la remarque précédente, pour tout $m' \in \mathrm{M}'$ distinct du mot vide e, $\langle 0 | m' | 0 \rangle = 0$.

[12] En continuant la remarque précédente, $L(m) = \langle 0 | m | 0 \rangle$.

Preuve du lemme 2.10 On remarque que pour tout mot m, $T(m)$ est une combinaison linéaire de mots à coefficients polynomiaux réels en q. On en déduit que pour tout mot m, $T_g(m)$ est combinaison linéaire de mots de M' à coefficients polynomiaux réels en q.

Construisons alors une forme linéaire $\widetilde{L}$ sur $\mathcal{A}$ en la définissant sur les mots de la manière suivante : $\widetilde{L}$ est nulle sur tout mot, excepté sur le mot vide e sur lequel elle prend la valeur 1. On pose alors $L = \widetilde{L} \circ T_g$. Par ce qui précède, $L(m) \in \mathbb{R}[q]$, et la conclusion s'ensuit.

■

Définition 2.12. Définissons $B : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ de la manière suivante[13]. Pour tout mot m, on pose $B(e, m) = L(m)$. Pour deux mots l et m, on pose $B(l, m) = B(e, l^*m)$. On étend B à $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ par linéarité à gauche et anti-linéarité à droite.

Pour résumer :

Proposition 2.13. *La forme $B : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ est linéaire à gauche et antilinéaire à droite.*

En définitive, nous tenons là notre candidat pour le produit scalaire. L'étude de ses propriétés passe par l'étude de l'opérateur de transformation :

Lemme 2.14. *Les assertions suivantes sont vérifiées :*

(i) Soit $m = m_1 m_2$ un mot. Alors :

$$T_g(m_1 m_2) = T_g(m_1 T_g(m_2)). \tag{10}$$

(ii) Pour tous mots m_1 et m_2 :

$$T_g(m_1 a_i a_j^* m_2) = q T_g(m_1 a_j^* a_i m_2) + \delta_{ij} T_g(m_1 m_2). \tag{11}$$

Preuve. On commence par (i).

(i) On peut déduire cela des deux propriétés suivantes. Si $m_2 \in M'$, alors $T_g(m_2) = m_2$. Si m_2 n'appartient pas à M', $T(m_1 m_2) = m_1 T(m_2)$ car seul m_2 est affecté par l'action de T.

(ii) Comme $T_g(m_2) \in M'$ (c'est le point clé), il vient :

$$T(m_1 a_i a_j^* T_g(m_2)) = q m_1 a_j^* a_i T_g(m_2) + \delta_{ij} m_1 T_g(m_2).$$

D'après (i), on a $T_g(m_1 m_2) = T_g(m_1 T_g(m_2))$. Mézalor, en utilisant le fait que $T_g \circ T = T_g$:

$$\begin{aligned} T_g(m_1 a_i a_j^* m_2) &= T_g(T(m_1 a_i a_j^* m_2)) \\ &= q T_g(m_1 a_j^* a_i T_g(m_2)) + \delta_{ij} T_g(m_1 T_g(m_2)). \\ &= q T_g(m_1 a_j^* a_i m_2) + \delta_{ij} T_g(m_1 m_2), \end{aligned}$$

ce qui conclut.

■

Définition 2.15. On appelle noyau de B le sous-espace vectoriel suivant :

$$\operatorname{Ker} B = \{x \in \mathcal{A} \mid \quad \forall y \in \mathcal{A}, B(y, x) = 0\}.$$

[13]En continuant la remarque 2.8, on a $B(l, m) = \langle l|0\rangle, m|0\rangle\rangle = \langle 0|l^* m|0\rangle$.

Lemme 2.16. *Les assertions suivantes sont vérifiées :*

(i) Pour tout i, a_i appartient au noyau de B.

(ii) L'idéal $\mathcal{I}$ (voir définition 2.7) de $\mathcal{A}$ est inclus dans le noyau de B.

(iii) B est à symétrie hermitienne, c'est-à-dire que $B(m_1, m_2) = \overline{B(m_2, m_1)}$ pour tous mots m_1, m_2.

Preuve. Pour l'assertion (i), on remarque que pour $y \in \mathcal{A}$, $B(y, a_i) = B(e, y^* a_i) = 0$.

Pour (ii), on note que l'ensemble des $m_1 R_{ij} m_2$ est une base de $\mathcal{I}$ comme $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Or, par le deuxième point du lemme 2.14, pour tout mot m_3 :

$$B(m_3, m_1 R_{ij} m_2) = B(e, m_3^* m_1 R_{ij} m_2) = 0,$$

d'où le résultat.

Pour (iii), on se souvient que $B(m_1, m_2) = B(e, m_1^* m_2)$. Il suffit donc de montrer que $B(e, m) = B(e, m^*)$ pour tout mot m, les quantités $B(e, m)$ étant réelles (lemme 2.10). Montrons donc que $T_g(m) = T_g(m^*)$. Il suffit de démontrer que $T_g(T^n(m)^*) = T_g(m^*)$. En prenant n suffisamment grand (pour avoir $T^n(m) = T_g(m)$), nous obtiendrons le résultat qui nous intéresse.

On voit qu'il suffit montrer que $T_g(T(m)^*) = T_g(m^*)$ pour tout mot (on rappelle que l'image par T d'un mot est une combinaison linéaire réelle de mots), quitte à réitérer. Distinguons deux cas, correspondant à ceux considérés lors de la définition de l'action de T.

- Si $m \in M'$, alors $m^* \in M'$. D'où $T_g(T(m)^*) = T_g(m^*) = m^*$.
- Sinon, on écrit $m = m_1 a_i a_j^* m_2$ avec $m_2 \in M'$. On remarque que $R_{ij}^* = R_{ji}$. Or :

$$\begin{aligned} m^* - T(m)^* &= \left(m_1 a_i a_j^* m_2\right)^* - \left(q m_1 a_j^* a_i m_2 + \delta_{ij} m_1 m_2\right)^* \\ &= m_2^* a_j a_i^* m_1^* - q m_2^* a_i^* a_j m_1^* - \delta_{ij} m_2^* m_1^* \\ &= m_2^* (a_j a_i^* - q a_i^* a_j - \delta_{ij}) m_1^* \\ &= m_2^* R_{ji} m_1^*. \end{aligned}$$

D'autre part, par le deuxième point du lemme 2.14 : $T_g(m_2^* R_{ji} m_1^*) = 0$. On a donc bien :

$$T_g(T(m)^*) = T_g(m^*).$$

■

Le travail préliminaire est presque achevé :

Proposition 2.17. *Sur l'espace vectoriel $E = \mathcal{A}/\operatorname{Ker}(B)$, il existe un vecteur $|0\rangle$, des opérateurs[14] a_i, a_i^* et une forme sesquilinéaire hermitienne $\tilde{B}$ qui vérifient les propriétés suivantes :*

(i) pour tous i, j on a :

$$a_i a_j^* - q a_j^* a_i = \delta_{ij}, \tag{12}$$

(ii) pour tout i, $a_i|0\rangle = 0$,

(iii) la forme $\tilde{B}$ est à symétrie hermitienne,

(iv) et finalement pour tout i, a_i et a_i^* sont adjoints par rapport à $\tilde{B}$.

[14]Notons le léger abus de notation qui identifie a_i avec son image dans le quotient.

Preuve. L'ensemble $E = \mathcal{A}/\operatorname{Ker}(B)$ hérite naturellement d'une structure de $\mathbb{C}$-espace vectoriel car $\operatorname{Ker}(B)$ est un sous-espace vectoriel de E. Nous noterons un élément de $\mathcal{A}$ sous la forme $\alpha|0\rangle$, où $\alpha \in \mathcal{A}$ est un représentant de la classe d'équivalence que l'on veut désigner. Démontrons les points de la proposition.

(i) La concaténation à gauche par les lettres est un opérateur linéaire sur $\mathcal{A}$. Les formules $B(m_1, a_i m_2) = B(a_i^* m_1, m_2)$ et $B(m_1, a_i^* m_2) = B(a_i m_1, m_2)$ montrent que $\operatorname{Ker}(B)$ est stable par concaténation à gauche ; ainsi, les opérateurs a_i et a_i^* (de concaténation à gauche) passent au quotient en opérateurs linéaires sur E.

Vu que R_{ij} est un élément de l'idéal bilatère $\mathcal{I} \subset \operatorname{Ker}(B)$ (deuxième point de la proposition 2.16), nos opérateurs a_i et a_j^* vérifient les relations de commutation $R_{ij} = 0$:

$$a_i a_j^* - q a_j^* a_i - \delta_{ij} = 0. \tag{13}$$

(ii) De plus, le vecteur $|0\rangle := e|0\rangle$ dans E est tel que $a_i(|0\rangle) = a_i|0\rangle = 0$ pour tout i d'après le premier point du lemme 2.16.

(iii) Intéressons-nous maintenant à la forme B : la forme B passe au quotient sur E en une forme sesquilinéaire, $\tilde{B}$. En utilisant le troisième point du lemme 2.16, vérifions qu'elle est à symétrie hermitienne : $\tilde{B}(m_1|0\rangle, m_2|0\rangle) = B(m_1, m_2) = \overline{B(m_2, m_1)} = \overline{\tilde{B}(m_2|0\rangle, m_1|0\rangle)}$.

(iv) D'après la définition 2.12, les opérateurs a_i et a_i^* sont adjoints par $\tilde{B}$ car pour tout v,w dans E, $B(v, a_i w) = B(a_i^* v, w)$.

■

Pour simplifier les notations, $\tilde{B}$ sera notée B dans la suite. Il reste encore à développer l'argument principal, à savoir que B est définie positive.

2.4 La forme sesquilinéaire B est définie positive

2.4.1 Écriture de E comme somme de sous-espaces orthogonaux E_α

Intuitivement, nous allons écrire E comme somme directe orthogonale (pour B) de sous-espaces vectoriels E_α de dimension finie. Nous montrons alors que B est définie positive sur chacun des E_α. Commençons par partir à la recherche de ces sous-espaces E_α.

Proposition 2.18. *Les assertions suivantes sont vérifiées :*

(i) Notons M^* l'ensemble des mots ne contenant que des lettres étoilées. Alors l'ensemble des $m|0\rangle$ où m parcourt M^* est une famille génératrice de E.

(ii) Soient m_1, m_2 deux mots de M^*. Si $B(m_1|0\rangle, m_2|0\rangle)$ est non nul, alors les mots m_1 et m_2 sont permutation l'un de l'autre.

Preuve. (i) Souvenons-nous de l'opérateur de transformation globale, T_g, défini sur $\mathcal{A}$ (définition 2.11). Il laisse stable l'idéal $\mathcal{I}$ engendré par les relations de commutation R_{ij}, et, par passage au quotient, agit comme l'identité sur $\mathcal{A}/\mathcal{I}$. Ainsi, tout vecteur v de $\mathcal{A}$ est dans la classe d'équivalence de $T_g(v)$. Autrement dit, v et $T_g(v)$ ont même image dans $\mathcal{A}/\mathcal{I}$. or $\mathcal{I} \in \operatorname{Ker} B$ (deuxième point du lemme 2.16). Cela montre que $v|0\rangle = T_g(v)|0\rangle$ dans E.

Or l'image de T_g est contenue dans l'espace vectoriel engendré par les mots de M'. Ainsi, tout vecteur v de $\mathcal{A}$ est dans la classe d'équivalence de $A/\operatorname{Ker} B = E$ d'un élément du sous-espace vectoriel engendré par M'. Autrement dit, l'image du sous-espace vectoriel engendré par

M' engendre E. D'autre part, d'après le premier point du lemme 2.16, pour tout i, $a_i \in \operatorname{Ker} B$. Cela implique que le sous-espace vectoriel engendré par $M' \backslash M^*$ est inclus dans $\operatorname{Ker} B$. On en déduit que le sous-espace vectoriel engendré par M^* engendre E. En conclusion, l'ensemble des $m|0\rangle$ où $m \in M^*$ forme une famille génératrice de E.

(ii) Pour prouver ce deuxième point, on définit les fonctions suivantes sur M : $n_l(m)$ est le nombre de fois où la lettre a_l est utilisée dans m, et n_l^* est le nombre de fois où a_l^* est utilisée dans m. On pose $N_l(m) = n_l(m) - n_l^*(m)$.

Considérons le mot $m = m_1 a_i a_j^* m_2$. Alors, pour tout l, on a l'égalité suivante :

$$N_l(m_1 a_i a_j^* m_2) = N_l(m_1 a_j^* a_i m_2). \tag{14}$$

De plus, pour $i = j$:

$$N_l(m_1 a_i a_i^* m_2) = N_l(m_1 m_2) \tag{15}$$

On partitionne l'ensemble des mots M en sous-ensembles M_i sur lesquels chacune des fonctions N_l est constante. Pour tout k, la définition de T (définition 2.11) ainsi que les égalités (14) et (15) assurent que[15] l'espace vectoriel engendré par M_k est stable par T_g. Or, si $m \in M'$ et s'il existe l tel que $N_l(m) \neq 0$, alors $L(m) = 0$ (par définition de L, voir démonstration du lemme 2.10). On en déduit qu'une condition nécessaire pour que $L(m)$ soit non nul est que pour tout l, $N_l(m) = 0$. Ainsi, si $m = m_1^* m_2$ où m_1 et m_2 appartiennent à M^*, alors le fait que $L(m) = B(m_1|0\rangle, m_2|0\rangle)$ soit non nul implique que pour tout l, $N_l(m_1^* m_2) = 0$. C'est-à-dire $n_l^*(m_1) = n_l^*(m_2)$. En définitive, pour tout k, m_1 et m_2 contiennent le même nombre de fois la lettre a_l^*. Donc m_1 et m_2 sont permutations l'un de l'autre. C'est ce qu'on voulait démontrer. ∎

Définition 2.19. Dorénavant, on désignera par α un ensemble (avec répétitions) de lettres *étoilées* a_i^*. On définit M_α^* comme l'ensemble des mots s'écrivant avec les lettres de α, et E_α le sous-espace de E engendré par les $m|0\rangle$, où m parcourt M_α^*.

Notons[16] $n = |\alpha|$. Remarquons que $\mathfrak{S}_n$ agit naturellement sur M_α^*, via la permutation des lettres.

Remarque 2.20. Ainsi, pour un mot $m \in M_\alpha^*$, M_α^* s'identifie à $\mathfrak{S}_n / \mathfrak{S}_m$ où $\mathfrak{S}_m$ est le sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$ dont l'action sur le mot m est triviale.

Proposition 2.21. *L'espace vectoriel E est somme orthogonale (au sens de B) des E_α, où α parcourt tous les ensembles finis (avec répétitions) de lettres étoilées.*

Preuve. Par le premier point de la proposition 2.18, les espaces E_α engendrent E. Par le deuxième point de la proposition 2.18, ces espaces sont orthogonaux pour B en ce sens que si $v \in E_\alpha$ et $w \in E_\beta$ où α et β sont distincts, alors $B(v, w) = 0$. ∎

[15] C'est le point clé de la preuve.

[16] Dans toute la suite, on note $|X|$ le cardinal de l'ensemble X.

2.4.2 Étude de la positivité de B sur E_α

Nous montrons maintenant que la forme hermitienne B est un produit scalaire sur E.

Définition 2.22. On considère la matrice :

$$A_\alpha(q) = \left[B(m_1|0\rangle, m_2|0\rangle)\right]_{m_1,m_2\in M_\alpha}.$$

Dans un premier temps, on fixe q et on note donc $A_\alpha = A_\alpha(q)$.

Proposition 2.23. *Si pour tout α, A_α est définie positive*[17]*, alors B est un produit hermitien sur E.*

Preuve. Ceci résulte du fait que E est somme orthogonale des espaces E_α (proposition 2.18) et que l'ensemble de mots M_α est une famille génératrice de E_α (proposition 2.21). ■

Remarque 2.24. Nous n'avons jamais montré que les mots de M_α forment une base de E_α. Dans la suite, ce résultat sera cependant démontré indirectement dans le cas $|q| < 1$.

Dans un premier temps, nous allons calculer la matrice A_α, ce qui permettra de montrer dans un deuxième temps qu'elle est définie positive.

2.4.3 Calcul de la matrice A_α

Indiçons les lignes et colonnes de la matrice A_α d'une manière qui facilitera le calcul. Fixons un mot $m \in M_\alpha$ et notons $n = |\alpha|$. Nous avons vu que M_α était en bijection avec l'ensemble $\mathfrak{S}_n/\mathfrak{S}_m$ (remarque 2.20). Ainsi, nous avons :

$$A_\alpha = \left[B(\tau(m)|0\rangle, \sigma(m)|0\rangle)\right]_{\tau,\sigma},$$

où σ et τ parcourent un ensemble de représentants des classes d'équivalence de $\mathfrak{S}_n/\mathfrak{S}_m$.

Et maintenant, une dernière définition avant le grand calcul :

Définition 2.25. Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, une *inversion* de σ est un couple (i,j) $(1 \leq i,j \leq n)$ tel que $i < j$ et $\sigma(i) > \sigma(j)$. On note $I(\sigma)$ le nombre d'inversions de σ, c'est-à-dire le cardinal de l'ensemble $\{(i,j) \mid 1 \leq i < j \leq n \text{ et } \sigma(i) > \sigma(j)\}$.

La propriété découle de la définition du nombre d'inversion :

Proposition 2.26. *Pour $\pi \in \mathfrak{S}_n$, on a $I(\pi) = I(\pi^{-1})$.*

Nous sommes maintenant en mesure de calculer explicitement la matrice A_α.

Proposition 2.27. *Les coefficients de la matrice A_α prennent les valeurs suivantes :*

$$(A_\alpha)_{\sigma,\tau} = B(\tau(m)|0\rangle, \sigma(m)|0\rangle) = \sum_{\pi\in\mathfrak{S}_n, \pi\tau\mathfrak{S}_m=\sigma\mathfrak{S}_m} q^{I(\pi)}$$

Exemple 2.28. Dans le cas particulier où α ne contient pas plusieurs fois la même lettre, $\mathfrak{S}_m = \emptyset$, et donc $(A_\alpha)_{\tau,\sigma} = q^{I(\sigma\tau^{-1})}$.

[17] C'est-à-dire que pour tout vecteur x non nul de $\mathbb{R}^{|M_\alpha|}$, $\langle x, Ax\rangle > 0$.

Montrons maintenant la proposition 2.27.

Preuve. Soient $m_1 = a^*_{\psi(1)}a^*_{\psi(2)}\cdots a^*_{\psi(n)}$ et $m_2 = a^*_{\phi(1)}a^*_{\phi(2)}\cdots a^*_{\phi(n)}$ deux mots de M^*_α. On souhaite calculer $B(m_1, m_2)$. Intéressons-nous donc à $T_g(m_1^* m_2)$. Grâce à l'équation (10), nous commençons par caluler $T_g(a_{\psi(1)}m_2)$. On pourra alors itérer, en calculant successivement :

$$T_g(a_{\psi(i)}T_g(a_{\psi(i-1)}\cdots a_{\psi(1)}m_2)), \tag{16}$$

pour finalement calculer

$$T_g(a_{\psi(n)}\cdots a_{\psi(1)}a^*_{\phi(1)}\cdots a^*_{\phi(n)}). \tag{17}$$

En utilisant les relations de commutation (12), on se convainc que :

$$T_g(a_{\psi(1)}m) = \sum_{k,\phi(k)=\psi(1)} q^{k-1}a^*_{\phi(1)}a^*_{\phi(2)}\cdots \widehat{a^*_{\phi(k)}}\cdots a^*_{\phi(n)} + q^n m a_{\psi(1)},$$

où la notation $\widehat{a^*_{\phi(k)}}$ signifie que l'on omet le terme $a^*_{\phi(k)}$. Or $L(ma_{\psi(1)})$ est nul d'après le deuxième point de la propriété 2.17. Nous en déduisons le fait suivant : les termes de l'équation (17) qui vont apporter une contribution non nulle à $B(m_1, m_2)$ sont en bijection avec l'ensemble des applications qui à une lettre de m_2 associent un de ses exemplaires dans m_1 de manière injective, autrement dit avec les permutations π telles que $\pi m_1 = m_2$[18]. Considérons donc une permutation π telle que $\pi m_1 = m_2$.

Nous cherchons à calculer le facteur q^{N_π} devant le terme issu de π. C'est un produit de n termes, qui correspondent aux facteurs qui apparaissent lorsqu'on traite les n lettres de m_1^* successivement comme décrit dans (17). À la i-ième étape, le facteur suivant apparaît :

$$q^{\mathrm{Card}\{j\ ,\ i<j\ \ et \pi(i)>\pi(j)\}}. \tag{18}$$

Ainsi :

$$N_\pi = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Card}\{j \mid i<j \text{ et } \pi(i)>\pi(j)\} = \mathrm{Card}(\{(i,j) \mid i<j \text{ et } \pi(i)>\pi(j)\}) = I(\pi).$$

En définitive :

$$B(m_1, m_2) = \sum_{\pi\in\mathfrak{S}_n, \pi m_1 = m_2} q^{I(\pi)}.$$

Il ne reste plus qu'à voir que si $m_1 = \tau m$ et $m_2 = \sigma m$, alors l'ensemble des permutations π telles que $\pi m_1 = m_2$ est exactement l'ensemble des permutations π telles que $\pi\tau\mathfrak{S}_m = \sigma\mathfrak{S}_m$. Cela donne le résultat souhaité. ∎

Proposition 2.29. *Supposons que pour tout q, $A_\alpha(q)$ soit inversible. Alors $A_\alpha(q)$ est définie positive pour tout q.*

Preuve. D'après l'expression de la matrice $A_\alpha(q)$ (proposition 2.27) , cette matrice éponyme dépend continûment de q. La proposition 2.26 implique que la matrice $A_\alpha(q)$ est symétrique réelle, donc diagonalisable. Ses valeurs propres dépendent continûment[19] de q. Or $A_\alpha(0) = Id$. Si $A_\alpha(q)$ est inversible pour tout q, elle n'admet jamais 0 comme valeur propre, et donc pour tout q, les valeurs propres de $A_\alpha(q)$ sont strictement positives. En particulier, $A_\alpha(q)$ est définie positive. ∎

[18] Un petit exemple : si $m_1 = a_1^*a_1^*a_2^*$, et $m_2 = a_1^*a_2^*a_1^*$, alors les permutations π de $\mathfrak{S}_3$ telles que $\pi(m_1) = m_2$ sont les suivantes : $(1,3,2)$ et $(3,1,2)$

[19] Grâce à la propriété de « continuité des racines d'un polynôme ».

Remarque 2.30. Nous avons montré au passage que les mots de M_α forment une base de E_α.

Nous calculons maintenant le déterminant de la matrice $A_\alpha(q)$. Pour cela, la théorie de la représentation se révèle être une aide précieuse.

2.4.4 Calcul de $\det A_\alpha(q)$

On notera $\overline{\alpha}$ les α qui ne contiennent pas plusieurs fois la même lettre. Nous montrerons qu'*on peut se ramener à ce cas.*

Définition 2.31. On note $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$ l'ensemble des combinaisons linéaires formelles complexes d'éléments de $\mathfrak{S}_n$:

$$\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n] = \{\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \lambda_\sigma \sigma, \lambda_\sigma \in \mathbb{C}\},$$

qui est canoniquement muni d'une structure d'algèbre.

Définissons la représentation régulière de $\mathfrak{S}_n$.

Définition 2.32. Une *représentation* du groupe $\mathfrak{S}_n$ sur un espace vectoriel complexe de dimension finie V est un morphisme du groupe $\mathfrak{S}_n$ dans $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$. Une telle représentation du groupe $\mathfrak{S}_n$ se prolonge alors naturellement - et de manière unique - en un morphisme d'algèbres de $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$ dans $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$, appelé représentation de l'algèbre $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$.

La *représentation régulière* de $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$ est celle associée à la représentation régulière de $\mathfrak{S}_n$ définie comme suit. Considérons V, le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions $f : \mathfrak{S}_n \mapsto \mathbb{C}$. La représentation régulière de $\mathfrak{S}_n$ est alors le morphisme de groupes $\sigma \mapsto \rho(\sigma)$, où

$$(\rho(\sigma)f)(\tau) := f(\sigma\tau)$$

Remarque 2.33. Remarquons que l'ensemble des fonctions δ_σ, qui valent 1 en σ et 0 en tout autre élément de $\mathfrak{S}_n$, forment une base naturelle de V.

Proposition 2.34. *Considérons :*

$$a_n(q) = \sum_{\pi\in\mathfrak{S}_n} q^{I(\pi)}\pi \in \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n].$$

Alors, en désignant toujours par ρ la représentation régulière de $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$, la matrice de $\rho(a_n(q))$ exprimée dans la base naturelle de V est $A_{\overline{\alpha}}(q)$.

Preuve. Calculons donc $\rho(a_n(q))(\delta_\sigma)$:

$$\begin{aligned}\rho(a_n(q))(\delta_\sigma) &= \sum_{\pi\in\mathfrak{S}_n} q^{I(\pi)}\rho(\pi)(\delta_\sigma) \\ &= \sum_{\pi\in\mathfrak{S}_n} q^{I(\pi)}\delta_{\pi^{-1}\sigma} \qquad \text{(le vérifier)} \\ &= \sum_{\tau\in\mathfrak{S}_n} q^{I(\sigma\tau^{-1})}\delta_\tau,\end{aligned}$$

d'où le résultat. ■

Définition 2.35. Ainsi, dans le cas où tous les lettres de $\overline{\alpha}$ sont distinctes, $A_{\overline{\alpha}}(q)$ ne dépend que de $|\overline{\alpha}| = n$. On pose donc $A_n(q) = A_{\overline{\alpha}}(q)$.

Revenons maintenant au cas général en considérant α, un ensemble de lettres étoilées et $m \in \mathrm{M}_\alpha^*$ (voir définition 2.19). On considère le sous-espace vectoriel V' de V constitué des fonctions f stables par $\mathfrak{S}_m$ au sens suivant : pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_m$, $f(\tau) = f(\tau\sigma)$. On voit que V' est stable par tous les $\rho(\pi)$: ainsi (V', ρ) est une sous-représentation de (V, ρ).

Une base naturelle de V' est alors l'ensemble des fonctions $\delta_{\sigma\mathfrak{S}_m}$ qui valent 1 en $\sigma\mathfrak{S}_m$ et 0 en tout autre classe d'équivalence de $\mathfrak{S}_n/\mathfrak{S}_m$.

Proposition 2.36. *Dans cette base, $\rho(a_n(q))$ est représenté par la matrice $A_\alpha(q)$.*

Preuve. En effet :

$$\begin{aligned}
\rho(a_n(q))(\delta_{\sigma\mathfrak{S}_m}) &= \sum_{\pi\in\mathfrak{S}_n} q^{I(\pi)}\rho(\pi)(\delta_{\sigma\mathfrak{S}_m}) \\
&= \sum_{\pi\in\mathfrak{S}_n} q^{I(\pi)}\delta_{\pi^{-1}\sigma\mathfrak{S}_m}.
\end{aligned}$$

Ainsi le coefficient $(\tau\mathfrak{S}_m, \sigma\mathfrak{S}_m)$ est :

$$\sum_{\pi\in\mathfrak{S}_n, \pi^{-1}\sigma\mathfrak{S}_m=\tau\mathfrak{S}_m} q^{I(\pi)}.$$

La proposition 2.27 permet de conclure. ∎

Nous en déduisons la propriété suivante.

Proposition 2.37. *Si l'endomorphisme $\rho(a_n(q)) \in \mathrm{End}(V)$, représenté par la matrice $A_n(q)$, est inversible, alors pour tout $\alpha \in M_\alpha^*$ tel que $|\alpha| = n$, la matrice $A_\alpha(q)$ est inversible.*

Preuve. En effet, $A_\alpha(q)$ est la matrice d'une restriction au sous-espace stable V' de l'endomorphisme $\rho(a_n(q))$ représenté par $A_n(q)$. ∎

Rappellons que la matrice $A_n(q)$ a été calculée dans l'exemple 2.28 :

$$(A_n)_{\sigma,\tau} = q^{I(\sigma\tau^{-1})}.$$

À l'aide de la vision de $A_n(q)$ comme matrice de l'endomorphisme $\rho(a_n(q)) \in \mathrm{End}(V)$, nous allons pouvoir calculer son déterminant.

Théorème 2.38. *Nous avons l'égalité suivante :*

$$\det A_n(q) = \prod_{k=1}^{n-1}(1 - q^{k^2+k})^{\frac{n!(n-k)}{k^2+k}}.$$

Preuve. Essentiellement, la preuve se résume à une suite de factorisations. Nous ne donnons que l'idée de la preuve (le lecteur intéressé pourra consulter l'article de Zagier [4]).

1. Si $i < j$, on construit $T_{i,j} \in \mathfrak{S}_n$ de la manière suivante :

$$T_{i,j}(k) = \begin{cases} k & \text{si } 1 \leq k < i, \\ j & \text{si } k = i, \\ k-1 & \text{si } i < k \leq j, \\ k & \text{si } j < k. \end{cases}$$

Posons alors :

$$b_n = \sum_{k=1}^{n-1} q^{n-k} T_{k,n},$$

de sorte que[20] $a_n = a_{n-1} b_n$, où nous avons identifié $\mathfrak{S}_{n-1}$ au sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$ qui fixe n. On voit que $det(\rho_{\mathfrak{S}_n}(a_{n-1})) = det(\rho_{\mathfrak{S}_{n-1}}(a_{n-1}))^n$.

2. Posons :

$$c_n = (1 - q^{n-1} T_{1,n})(1 - q^{n-2} T_{2,n}) \cdots (1 - q T_{n-1,n}),$$

et

$$d_n = (1 - q^{n+1} T_{1,n})(1 - q^n T_{2,n}) \cdots (1 - q^2 T_{n,n}),$$

de sorte que[21] $b_n c_n = d_{n-1}$.

3. Nous nous sommes donc ramenés à calculer les déterminants c_n et d_n, ou encore les déterminants d'éléments de la forme $(1 - tT_{a,b})$. Nous savons calculer ce genre de déterminants, car $T_{a,b}$ est un cycle. Il vient :

$$det(\rho_{\mathfrak{S}_n}(1 - tT_{a,b})) = (1 - t^{b-a+1})^{\frac{n!}{b-a+1}}.$$

En remontant les calculs, on démontre le théorème 2.38.

■

Lemme 2.39. *Soit $\mathcal{F}$ un $\mathbb{C}$-espace vectoriel muni d'une forme $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sesquilinéaire à symétrie hermitienne, positive. Alors :*

$$\{x \in \mathcal{F} | \, \langle x, x \rangle = 0\} = \{x \in \mathcal{F} | \, \forall y \in \mathcal{F}, \langle x, y \rangle = 0\}. \tag{19}$$

On note cet ensemble $\ker\langle \cdot, \cdot \rangle$. *De plus, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ et tout opérateur a sur $\mathcal{F}$ admettant adjoint*[22] *:*

$$\forall x, y \in \ker\langle \cdot, \cdot \rangle, \quad x + \lambda y \in \ker\langle \cdot, \cdot \rangle \quad \text{et} \quad a(x) \in \ker\langle \cdot, \cdot \rangle. \tag{20}$$

Preuve. La première assertion est une conséquence de l'inégalité de Cauchy-Schwartz, et la seconde en découle grâce aux propriétés de l'adjoint. ■

Corollaire 2.40. *Pour $-1 \leq q \leq 1$, $\widetilde{B}$ est définie positive.*

[20] On note $a_n = a_n(q)$.

[21] Cette étape est plutôt calculatoire.

[22] c'est-à-dire qu'il existe un opérateur $a^* \in \mathcal{L}(\mathcal{F})$ tel que pour tous $x, y \in \mathcal{F}$: $\langle a^*(x), y \rangle = \langle x, a(y) \rangle$.

Preuve. Si $-1 < q < 1$, le théorème 2.38 montre que $A_n(q)$ est inversible. D'après la proposition 2.37, pour tout $\alpha \in M_\alpha^*$, $A_\alpha(q)$ est inversible. La proposition 2.29 montre que pour tout $\alpha \in M_\alpha^*$, $A_\alpha(q)$ est définie positive. La proposition 2.23 permet alors de conclure.

Si $|q| = 1$, $\widetilde{B}$ est positive, donc définie positive. En effet, si $x|0\rangle$ est tel que $\widetilde{B}(x|0\rangle, x|0\rangle) = 0$, alors $x \in \operatorname{Ker} B$ d'après le lemme 2.39, de sorte que $x|0\rangle = 0$ car $E = \mathcal{A}/\operatorname{Ker} B$. ∎

Ainsi, d'après le corollaire 2.40 et la proposition 2.17, nous avons bien muni E d'un produit scalaire. Nous en déduisons :

Théorème 2.41. *Pour $q \in [-1, 1]$, il existe espace de Hilbert $\mathcal{E}$ muni d'opérateurs $\{a_i, i \in \mathbb{N}\}$ définis sur un sous-espace dense de $\mathcal{E}$ et d'un vecteur $|0\rangle \in \mathcal{E}$ tels que les deux conditions suivantes soient vérifiées :*

$$\begin{aligned} \forall i, \forall j, \qquad & a_i a_j^* - q a_j^* a_i = \delta_{ij}, \\ \forall i, \qquad & a_i|0\rangle = 0. \end{aligned}$$

Preuve. Nous prenons pour $\mathcal{E}$ le complété de E par rapport au produit scalaire B. ∎

3 « An example of generalized Brownian motion », d'après Speicher et Bozejko

3.1 Introduction et structure de la preuve

Nous nous intéressons maintenant à la preuve de Bozejko et Speicher [5]. Rappelons que le principal résultat obtenu dans ce dernier article est le suivant :

Théorème 3.1. *Soit q un réel tel que $-1 \leq q \leq 1$. Il existe un espace de Hilbert $\mathcal{E}$, un vecteur $\Omega \in \mathcal{E}$ et des opérateurs $\{c(f), f \in L^2(\mathbb{R})\}$, définis sur $\mathcal{E}$ si $q < 1$, et sur un sous-espace dense de $\mathcal{E}$ si $q = 1$, vérifiant les deux conditions suivantes :*

$$\forall f, g \in L^2(\mathbb{R}), \qquad c(f)c^*(g) - qc^*(g)c(f) = \langle f, g\rangle Id, \tag{21}$$

$$\forall f \in L^2(\mathbb{R}), \qquad c(f)\Omega = 0, \tag{22}$$

où $c^*(f)$ désigne l'opérateur adjoint de $c(f)$. De plus, lorsque $-1 \leq q < 1$, les opérateurs $c(f)$ sont continus.

La première partie du théorème implique le théorème 2.41 de Zagier. Il suffit en effet de se donner une base Hilbertienne[23] $\{f_i, i \in \mathbb{N}\}$ de $L^2(\mathbb{R})$ et de considérer les opérateurs $\{c(f_i), i \in \mathbb{N}\}$.

La seconde partie permet de se passer de la restriction « sur un sous-espace dense » dans le cas $q < 1$ grâce au caractère continu des opérateurs.

Avant de commencer la démonstration de ce résultat, signalons que les prémisses de la preuve sont différentes de celles de Zagier. En effet, nous allons partir d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et de définir directement des opérateurs $c(f)$ et $c^*(f)$, qui vont vérifier (21) par construction. Il s'agira alors de trouver une forme sesquilinéaire hermitienne tel que $c(f)$ et $c^*(f)$ soient adjoints. Une fois encore, il faudra vérifier que cette forme est positive.

3.2 Construction des opérateurs $c(f)$ et $c^*(f)$

Dans toute la suite de cette section, nous considérons un espace de Hilbert complexe séparable $\mathcal{H}$. Nous obtiendrons le résultat annoncé en prenant $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$. Commençons par préciser l'espace dans lequel nous allons travailler.

Définition 3.2. On considère l'espace de Fock $\mathcal{F} = \bigoplus_{n\geq 0} \mathcal{H}^{\otimes n}$ (voir Éq. (4)), où par définition $\mathcal{H}^0 \simeq \mathbb{C}\Omega$. Autrement dit, $\mathcal{F}$ est le $\mathbb{C}$-espace vectoriel constitué des combinaisons linéaires finies d'éléments de $\bigcup_{n\geq 0} \mathcal{H}^{\otimes n}$. Le vecteur Ω est le vecteur *vide de particules*.

Remarque 3.3. Pour fixer les idées, rappelons que $\mathcal{F}$ est muni d'un produit scalaire canonique $\langle \cdot, \cdot \rangle$ défini par :

- si $n \neq m$:

$$\langle g_1 \otimes \cdots \otimes g_n, h_1 \otimes \cdots \otimes h_m\rangle = 0.$$

- si $n = m$:

$$\langle g_1 \otimes \cdots \otimes g_n, h_1 \otimes \cdots \otimes h_n\rangle := \langle g_1, h_1\rangle \cdots \langle g_n, h_n\rangle,$$

[23] qui existe bien, car $L^2(\mathbb{R})$ est un espace de Hilbert séparable.

Définissons maintenant nos opérateurs $c(f)$ et $c^*(f)$.

Définition 3.4. Pour $f \in \mathcal{H}$ et $h_1, \dots, h_n \in \mathcal{H}$, on définit les opérateurs :

$$c^*(f)\Omega = f, \qquad c^*(f)\,[h_1 \otimes \cdots \otimes h_n] = f \otimes h_1 \otimes \cdots \otimes h_n, \tag{23}$$

$$\text{et } c(f)\Omega = 0, \qquad c(f)\,[h_1 \otimes \cdots \otimes h_n] = \sum_{k=1}^{n} q^{k-1}\langle f, h_k\rangle h_1 \otimes \cdots \otimes \widehat{h_k} \otimes \cdots \otimes h_n, \tag{24}$$

où $\widehat{h_k}$ signifique que h_k est omis dans le produit tensoriel. On prolonge ensuite $c(f)$ et $c^*(f)$ à $\mathcal{F}$ tout entier par linéarité.

Remarque 3.5. Remarquons que :

$$c(f)h_1 \otimes \cdots \otimes h_n = \langle f, h_1\rangle h_2 \otimes \cdots \otimes h_n + qh_1 \otimes [c(f)h_2 \otimes \cdots \otimes h_n] \tag{25}$$

Contrairement aux apparences, ces définitions sont naturelles, comme en témoigne la démonstration du lemme suivant.

Lemme 3.6. *Les opérateurs $c(f)$ vérifient la relation suivante pour tous $f, g \in \mathcal{H}$:*

$$c(f)c^*(g) - qc^*(g)c(f) = \langle f, g\rangle Id.$$

Preuve. Il suffit de voir que, grâce à (25) :

$$\begin{aligned} [c(f)c^*(g)]h_1 \otimes \cdots \otimes h_n &= c(f)g \otimes h_1 \otimes \cdots h_n \\ &= \langle f, g\rangle h_1 \otimes \cdots h_n + qg \otimes [c(f)h_1 \otimes \cdots \otimes h_n] \\ &= [\langle f, g\rangle \mathrm{Id} + qc^*(g)c(f)]\, h_1 \otimes \cdots h_n. \end{aligned}$$

■

3.3 Construction d'une forme sesquilinéaire $\langle\cdot,\cdot\rangle_q$

Nous construisons maintenant un produit scalaire sur $\mathcal{F}$ par rapport auquel $c(f)$ et $c^*(f)$ seront adjoints.

Définition 3.7. On définit la forme sesquilinéaire à symétrie hermitienne $\langle\cdot,\cdot\rangle_q$ sur $\mathcal{F}$ de la manière suivante :

- Si $n \neq m$, on pose[24] :

$$\langle g_1 \otimes \cdots \otimes g_n, h_1 \otimes \cdots \otimes h_m\rangle_q = 0.$$

- Si $n = m$, on définit $\langle\cdot,\cdot\rangle_q$ récursivement par $\langle g_1, h_1\rangle_q = \langle g_1, h_1\rangle$, puis :

$$\langle g_1 \otimes \cdots \otimes g_n, h_1 \otimes \cdots \otimes h_n\rangle_q := \langle g_2 \otimes \cdots \otimes g_n, c(g_1)h_1 \otimes \cdots \otimes h_n\rangle_q, \tag{26}$$

autrement dit, d'après l'éq.(24) :

$$\langle g_1 \otimes \cdots \otimes g_n, h_1 \otimes \cdots \otimes h_n\rangle_q = \sum_{k=1}^{n} q^{k-1}\langle g_1, h_k\rangle\langle g_2 \otimes \cdots \otimes g_n, h_1 \otimes \cdots \otimes \widehat{h_k} \otimes \cdots \otimes h_n\rangle_q. \tag{27}$$

[24] cette définition est naturelle : on veut toujours que deux produits tensoriels comportant un nombre distinct de « $\otimes$ » soient orthogonaux.

Cette définition est encore une fois naturelle, comme en témoigne la preuve du lemme suivant.

Lemme 3.8. *Pour tout $f \in \mathcal{H}$, $c(f)$ et $c^*(f)$ sont adjoints par rapport à $\langle \cdot, \cdot \rangle_q$. Autrement dit :*

$$\forall \xi, \eta \in \mathcal{F}, \qquad \langle c^*(f)\xi, \eta \rangle_q = \langle \xi, c(f)\eta \rangle_q.$$

Preuve. D'après les équations (23) et (26), pour tous $g_i, h_i \in \mathcal{H}$, les égalités suivantes ont lieu :

$$\begin{aligned} \langle c^*(f) g_1 \otimes \cdots \otimes g_n, h_1 \otimes \cdots \otimes h_{n+1} \rangle_q &= \langle f \otimes g_1 \otimes \cdots \otimes g_n, h_1 \otimes \cdots h_{n+1} \rangle_q \\ &= \langle g_1 \otimes \cdots \otimes g_n, c(f) h_1 \otimes \cdots h_{n+1} \rangle_q, \end{aligned}$$

d'où le résultat. ■

Notre objectif est maintenant de montrer que la forme bilinéaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_q$ est positive. L'idée est de voir qu'on peut écrire $\langle \xi, \eta \rangle_q = \langle \xi, P_q \eta \rangle$, où P_q est un certain opérateur sur $\mathcal{F}$. Il suffira alors d'étudier les propriétés de P_q. Autrement dit, nous allons ramener le problème de la positivité d'une forme bilinéaire à celui de la positivité d'un opérateur. Remarquons que la structure de $\mathcal{F}$ fait que, pour définir un opérateur dessus, il suffit de le faire sur chaque espace $\mathcal{H}^{\otimes n}$.

Définition 3.9. Dans un premier temps, soit $n \in \mathbb{N}$. On considère la représentation unitaire du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ sur $\mathcal{H}^{\otimes n}$, notée $\pi \mapsto U_\pi$ et définie par[25] :

$$U_\pi h_1 \otimes \cdots \otimes h_n = h_{\pi(1)} \otimes \cdots \otimes h_{\pi(n)}. \tag{28}$$

Introduisons alors :

$$P_q^{(n)} := \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} q^{I(\pi)} U_\pi \tag{29}$$

Ainsi, $P_q^{(n)}$ est un opérateur $\mathcal{H}^{\otimes n} \to \mathcal{H}^{\otimes n}$.

Définissons finalement :

$$P_q := \bigoplus_{n \geq 0} P_q^{(n)}. \tag{30}$$

Exemple 3.10. Par exemple :

$$P_q^{(3)} = U_{1,2,3} + qU_{1,3,2} + qU_{2,1,3} + q^2 U_{2,3,1} + q^2 U_{3,1,2} + q^3 U_{3,2,1}.$$

Remarque 3.11. On vérifie que l'adjoint de U_π est $U_{\pi^{-1}}$. Grâce à la propriété 2.26, on voit alors que P_q est autoadjoint.

Lemme 3.12. *Pour tous $\xi, \eta \in \mathcal{F}$:*

$$\langle \xi, \eta \rangle_q = \langle \xi, P_q \eta \rangle \tag{31}$$

[25] Comparer avec la proposition 2.34.

Preuve. Il suffit de montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $g_i, h_j \in \mathcal{H}$:

$$\begin{aligned}\langle g_1 \otimes \cdots \otimes g_n, h_1 \otimes \cdots \otimes h_n \rangle_q &= \langle g_1 \otimes \cdots \otimes g_n, P_q^{(n)} h_1 \otimes \cdots \otimes h_n \rangle \\ &= \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} q^{I(\pi)} \langle g_1, h_{\pi(1)} \rangle \cdots \langle g_n, h_{\pi(n)} \rangle.\end{aligned}$$

Nous raisonnons par récurrence, tout en laissant au lecteur le plaisir de vérifier que cette égalité a bien lieu pour $n = 1$.

Pour le passage de $n-1$ à n, l'idée est d'appliquer l'hypothèse de récurrence au membre de droite de l'équation (27), en faisant attention à l'indexation. Précisons cette étape. Compte tenu de la forme de ce membre, on introduit naturellement l'ensemble S^k, constitué des bijections de l'ensemble $\{2, \ldots, n\}$ sur $\{1, \ldots, \widehat{k}, \ldots, n\}$. Par hypothèse de récurrence, il vient :

$$\begin{aligned}\langle g_1 \otimes \cdots \otimes g_n, h_1 \otimes \cdots \otimes h_n \rangle_q &= \sum_{k=1}^{n} q^{k-1} \langle g_1, h_k \rangle \langle g_2 \otimes \cdots g_n, h_1 \otimes \cdots \otimes \widehat{h_k} \otimes \cdots h_n \rangle_q \\ &= \sum_{k=1}^{n} q^{k-1} \langle g_1, h_k \rangle \sum_{\sigma \in S^k} q^{I(\sigma)} \langle g_2, h_{\sigma(2)} \rangle \cdots \langle g_n, h_{\sigma(n)} \rangle.\end{aligned}$$

Un élément $\sigma \in S^k$ peut être vu comme un élément de $\mathfrak{S}_n$ en associant à σ la permutation $\pi \in \mathfrak{S}_n$ définie par :

$$\pi(1) = k \quad \text{et} \quad \pi(l) = \sigma(l) \text{ pour } l = 2, \ldots, n.$$

Le point clé est ensuite de voir que $I(\pi) = k-1+I(\sigma)$. En effet, ce procédé ajoute $k-1$ inversions de la forme $(1, l)$, où l est un entier. En définitive :

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{\sigma \in S^k} q^{k-1+I(\sigma)} \langle g_1, h_k \rangle \langle g_2, h_{\sigma(2)} \rangle \cdots \langle g_n, h_{\sigma(n)} \rangle = \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} q^{I(\pi)} \langle g_1, h_{\pi(1)} \rangle \cdots \langle g_n, h_{\pi(n)} \rangle.$$

Cela conclut la récurrence et la preuve du lemme. ■

3.4 Étude du caractère positif de $\langle \cdot, \cdot \rangle_q$

Rappelons ce qu'est un *opérateur positif.*

Définition 3.13. Un opérateur P auto-adjoint défini sur un espace de Hilbert H est dit *positif* si pour tout $x \in H$ on a $\langle x, Px \rangle \geq 0$, et *strictement positif* si pour tout $x \in H$ non nul on a $\langle x, Px \rangle > 0$.

Ainsi, le lemme 3.12 montre immédiatement que :

Lemme 3.14. *La forme $\langle \cdot, \cdot \rangle_q$ est positive (respectivement strictement positive) si, et seulement si, l'opérateur P_q est positif (respectivement strictement positif).*

Pour étudier la positivité de P_q nous aurons besoin des deux lemmes suivants :

Lemme 3.15 (Produit de Schur)**.** *Soient $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. On définit le* produit de Schur *de A et de B, noté $A \bullet B$, par la matrice dont les entrées sont $[A \bullet B]_{i,j} = A_{i,j} B_{i,j}$.*

(i) Si A et B sont symétriques positives, alors $A \bullet B$ est symétrique positive.

(ii) Si A et B sont symétriques définies positives, alors $A \bullet B$ est symétrique définie positive.

Preuve. C'est classique, nous renvoyons par exemple le lecteur à l'exercice 11 pp. 250-251 de l'ouvrage [13]. ■

Lemme 3.16. *Si la matrice $[q^{I(\pi^{-1}\sigma)}]_{\pi,\sigma\in\mathfrak{S}_n}$ est positive (respectivement définie positive), alors l'opérateur P_q est positif (respectivement défini positif).*

Preuve. Soient $\eta \in \mathcal{H}^{\otimes n}$ et $\{\xi_i, i \in \mathbb{N}\}$ une base Hilbertienne de $\mathcal{H}^{\otimes n}$. Remarquons que pour $\zeta \in \mathcal{H}^{\otimes n}$ et $\pi \in \mathfrak{S}_n$:

$$\langle \zeta, U_{\pi^{-1}}\xi\rangle = \langle U_\pi \zeta, \xi\rangle. \tag{32}$$

Alors :

$$\begin{aligned}
\langle \eta, P_q^{(n)}\eta\rangle &= \sum_{\pi\in\mathfrak{S}_n} q^{I(\pi)}\langle \eta, U_\pi \eta\rangle \\
&= \frac{1}{n!}\sum_{\pi,\sigma\in\mathfrak{S}_n} q^{I(\pi^{-1}\sigma)}\langle \eta, U_{\pi^{-1}\sigma}\eta\rangle \\
&= \frac{1}{n!}\sum_{\pi,\sigma\in\mathfrak{S}_n} q^{I(\pi^{-1}\sigma)}\langle U_\pi\eta, U_\sigma\eta\rangle \quad \text{grâce à (32)} \\
&= \frac{1}{n!}\sum_{\pi,\sigma\in\mathfrak{S}_n}\sum_{i\in\mathbb{N}} q^{I(\pi^{-1}\sigma)}\langle U_\pi\eta, \xi_i\rangle\langle \xi_i, U_\sigma\eta\rangle \\
&= \frac{1}{n!}\sum_{i\in\mathbb{N}} q^{I(\pi^{-1}\sigma)}\sum_{\pi,\sigma\in\mathfrak{S}_n}\overline{\langle \xi_i, U_\pi\eta\rangle}\langle \xi_i, U_\sigma\eta\rangle,
\end{aligned}$$

ce qui implique le résultat. ■

Lemme 3.17. *La matrice $[q^{I(\pi^{-1}\sigma)}]_{\pi,\sigma\in\mathfrak{S}_n}$ est positive pour $q \in [-1, 1]$.*

Preuve. Soit $r : \mathfrak{S}_n \to \mathbb{C}$ une application. Il s'agit donc de montrer que :

$$\sum_{\pi,\sigma\in\mathfrak{S}_n} q^{I(\pi^{-1}\sigma)} r(\sigma)\overline{r(\pi)} \geq 0.$$

On introduit Φ, l'ensemble des couples d'élements distincts de $\{1, 2, \ldots, n\}$:

$$\Phi = \{(i,j),\, i \neq j, 1 \leq i,j \leq n\}, \quad \text{ainsi que} \quad \Phi^+ = \{(i,j) \in \Phi,\, i < j\},$$

de sorte que $I(\pi) = |\pi(\Phi^+)\backslash\Phi^+|$. Remarquons que pour $\pi, \sigma \in \mathfrak{S}_n$:

$$|\sigma \circ \pi(\Phi^+)\backslash\Phi^+| = |\pi(\Phi^+)\backslash\sigma^{-1}(\Phi^+)|.$$

et que $I(\pi) = I(\pi^{-1})$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
2I(\pi^{-1}\sigma) &= I(\pi^{-1}\sigma) + I(\sigma^{-1}\pi) \\
&= |\pi^{-1}\sigma(\Phi^+)\backslash\Phi^+| + |\sigma^{-1}\pi(\Phi^+)\backslash\Phi^+| \\
&= |\sigma(\Phi^+)\backslash\pi(\Phi^+)| + |\pi(\Phi^+)\backslash\sigma(\Phi^+)| \\
&= |\sigma(\Phi^+)\Delta\pi(\Phi^+)|,
\end{aligned} \tag{33}$$

où $A\Delta B$ désigne la différence symétrique de deux ensembles A et B : $A\Delta B = A\cup B\backslash A\cap B$. Par ailleurs, en notant χ_A la fonction caractéristique de l'ensemble A, il vient, pour $A, B\subset\Phi$:

$$|A\Delta B| = \sum_{x\in\Phi}|\chi_A(x)-\chi_B(x)| = \sum_{x\in\Phi}|\chi_A(x)-\chi_B(x)|^2. \tag{34}$$

Dans un premier temps, supposons $0<q\leq 1$, et posons $q=e^{-\lambda}$ avec $\lambda\geq 0$. L'idée est d'écrire $q^{I(\pi^{-1}\sigma)}$ sous la forme d'un produit :

$$\begin{aligned}
q^{I(\pi^{-1}\sigma)} &= \exp(-\lambda I(\pi^{-1}\sigma))\\
&= \exp(-\frac{\lambda}{2}|\sigma(\Phi^+)\Delta\pi(\Phi^+)|) \qquad \text{grâce à (33)}\\
&= \prod_{x\in\Phi}\exp\left(-\frac{\lambda}{2}|\chi_{\sigma(\Phi^+)}(x)-\chi_{\pi(\Phi^+)}(x)|^2\right) \qquad \text{grâce à (34).}
\end{aligned}$$

Ainsi, d'après le lemme 3.15, il suffit de prouver que :

$$\sum_{\pi,\sigma\in\mathfrak{S}_n}\exp\left(-\frac{\lambda}{2}|\chi_{\sigma(\Phi^+)}(x)-\chi_{\pi(\Phi^+)}(x)|^2\right)r(\sigma)\overline{r(\pi)}\geq 0.$$

Posons alors $y_0=0$, $y_1=1$ et :

$$r(y_0)=\sum_{\sigma,\,x\notin\sigma(\Phi^+)}r(\sigma),\quad r(y_1)=\sum_{\sigma,\,x\in\sigma(\Phi^+)}r(\sigma).$$

En définitive :

$$\begin{aligned}
\sum_{\pi,\sigma\in\mathfrak{S}_n}\exp\left(-\frac{\lambda}{2}|\chi_{\sigma(\Phi^+)}(x)-\chi_{\pi(\Phi^+)}(x)|^2\right)r(\sigma)\overline{r(\pi)} &= \sum_{i,j=0}^{1}\exp\left(-\frac{\lambda}{2}|y_i-y_j|^2\right)r(y_i)\overline{r(y_j)}\\
&\geq 0,
\end{aligned}$$

car la matrice suivante est définie positive :

$$\begin{pmatrix} 1 & e^{-\frac{\lambda}{2}}\\ e^{-\frac{\lambda}{2}} & 1\end{pmatrix}.$$

Nous avons prouvé que la matrice $[q^{I(\pi^{-1}\sigma)}]_{\pi,\sigma\in\mathfrak{S}_n}$ est positive pour $0<q\leq 1$.

Pour $-1\leq q<0$, notons $\phi_q(\pi)=q^{I(\pi)}$, de sorte que $\phi_q(\pi)=(-1)^{I(\pi)}\phi_{-q}(\pi)$. Mais l'application $\pi\mapsto(-1)^{I(\pi)}$ est multiplicative[26], donc définit une matrice positive car $I(\pi)=I(\pi^{-1})$:

$$\sum_{\pi,\sigma\in\mathfrak{S}_n}(-1)^{I(\pi^{-1}\sigma)}r(\sigma)\overline{r(\pi)}=\left(\sum_{\pi\in\mathfrak{S}_n}(-1)^{I(\pi)}r(\pi)\right)\left(\sum_{\pi\in\mathfrak{S}_n}(-1)^{I(\pi)}\overline{r(\pi)}\right)\geq 0.$$

Le lemme 3.15 et le cas $0<q\leq 1$ permettent de conclure.

Finalement, le cas $q=0$ est trivial étant donné que $\phi_0(id)=1$ et $\phi_0(\pi)=0$ pour $\pi\neq id$. ■

[26] C'est la signature de π.

Proposition 3.18. *L'opérateur P_q est positif pour tout $q \in [-1, 1]$.*

Preuve. C'est une conséquence des lemmes 3.16 et 3.17. ■

Proposition 3.19. *L'opérateur P_q est strictement positif pour tout $q \in (-1, 1)$*

Preuve. Le cas $q = 0$ étant trivial, nous supposons $q \neq 0$. Comme dans la preuve du lemme 3.17, sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $0 < q < 1$. Nous dirons que ϕ_q est dégénéré si la matrice $[\phi_q(\pi^{-1}\sigma)]_{\pi,\sigma\in\mathfrak{S}_n}$ que ϕ_q engendre n'est pas définie positive.

Par l'absurde, soit $0 < q < 1$ tel que ϕ_q est dégénéré. D'après le lemme 3.16, $\phi_{\sqrt{q}}$ est dégénéré, et en itérant on obtient une infinité de valeurs q ($0 < q < 1$) distinctes pour lesquelles ϕ_q est dégénéré. Or dire que ϕ_q est dégénéré, c'est dire que le déterminant de la matrice $[\phi_q(\pi^{-1}\sigma)]_{\pi,\sigma\in\mathfrak{S}_n} = [q^{I(\pi^{-1}\sigma)}]_{\pi,\sigma\in\mathfrak{S}_n}$ est nul. Or ce déterminant est polynomial en q, ce qui est contradictoire. Cela démontre la proposition. ■

En définitive, d'après le lemme 3.14 et les deux propositions précédentes :

Proposition 3.20. *Pour $-1 \leq q \leq 1$, la forme bilinaire $\langle\cdot,\cdot\rangle_q$ est positive. Elle est définie positive si $|q| \neq 1$.*

3.5 Construction de l'espace de Hilbert

Ainsi, pour $-1 \leq q \leq 1$, nous avons construit un espace vectoriel $\mathcal{F}$, muni d'une forme bilinaire $\langle\cdot,\cdot\rangle_q$ positive (définie si $|q| \neq 1$), un vecteur $\Omega \in \mathcal{F}$ et des opérateurs $\{c(f), f \in L^2(\mathbb{R})\}$ définis sur $\mathcal{F}$ vérifiant les deux conditions suivantes :

$$\begin{aligned} \forall f, g \in L^2(\mathbb{R}), \qquad & c(f)c^*(g) - qc^*(g)c(f) = \langle f, g\rangle 1, \\ \forall f \in L^2(\mathbb{R}), \qquad & c(f)\Omega = 0, \end{aligned}$$

où $c^*(f)$ désigne l'opérateur adjoint de $c(f)$ par rapport à $\langle\cdot,\cdot\rangle_q$.

Proposition 3.21. *Soit q un réel tel que $-1 \leq q \leq 1$. Il existe un espace de Hilbert $\mathcal{E}$, un vecteur $\Omega \in \mathcal{E}$ et des opérateurs $\{c(f), f \in L^2(\mathbb{R})\}$ définis* sur un sous-espace dense[27] de $\mathcal{E}$ *vérifiant les deux conditions suivantes :*

$$\begin{aligned} \forall f, g \in L^2(\mathbb{R}), \qquad & c(f)c^*(g) - qc^*(g)c(f) = \langle f, g\rangle 1, \\ \forall f \in L^2(\mathbb{R}), \qquad & c(f)\Omega = 0, \end{aligned}$$

où $c^*(f)$ désigne l'opérateur adjoint de $c(f)$.

Preuve. Dans le cas $|q| \neq 1$, il suffit de prendre pour $\mathcal{E}$ la complétion de $\mathcal{F}$ par rapport à $\langle\cdot,\cdot\rangle_q$.

Si $|q| = 1$, notons $N = \ker\langle\cdot,\cdot\rangle_q$, qui est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}$ grâce à (19). Nous pouvons donc considérer l'espace vectoriel quotient $\mathcal{F}/N$. Les opérateurs $c(f), c^*(f)$ passent au quotient grâce à (20), ainsi que la forme $\langle\cdot,\cdot\rangle_q$. Cette dernière est définie positive sur $\mathcal{F}/N$, et nous pouvons continuer comme dans le cas $|q| \neq 1$. ■

Nous voulons maintenant nous affranchir de l'assertion « défini sur un sous-espace dense ». Pour cela, il faut étudier la continuité éventuelle des opérateurs $c(f)$.

[27] bien noter la différence par rapport au théorème 3.1.

3.6 Étude du caractère continu des opérateurs $c(f)$

Un lemme est d'abord nécessaire pour notre étude. Rappelons que P_q est autoadjoint (remarque 3.11).

Lemme 3.22. *En identifiant π à U_π (voir définition 3.9), nous avons :*

$$P_q^{(n+1)} = \left(Id \otimes P_q^{(n)}\right)(1 + q\pi_1 + q^2\pi_1\pi_2 + \cdots + q^n\pi_1\pi_2\cdots\pi_n).$$

Preuve. Notons $R^{(n)} = 1 + q\pi_1 + q^2\pi_1\pi_2 + \cdots + q^n\pi_1\pi_2\cdots\pi_n$. Compte tenu du lemme 3.12, il suffit de montrer que pour $\xi, \eta \in \mathcal{H}^{\otimes(n+1)}$:

$$\langle \xi, \eta \rangle_q = \langle \xi, \left(\mathrm{Id} \otimes P_q^{(n)} R^{(n)}\right) \eta \rangle.$$

En remarquant que :

$$\pi_1\pi_2\cdots\pi_k h_1 \otimes \cdots \otimes h_{n+1} = h_{k+1} \otimes h_1 \otimes \cdots \otimes \widehat{h_{k+1}} \otimes \cdots \otimes h_{n+1},$$

il vient :

$$\begin{aligned}
& \left\langle g_1 \otimes \cdots \otimes g_{n+1}, \left(1 \otimes P_q^{(n)} R^{(n)}\right) h_1 \otimes \cdots \otimes h_{n+1} \right\rangle \\
= & \sum_{k=1}^{n} q^{k-1} \langle g_1, h_k \rangle \langle g_2 \otimes \cdots \otimes g_{n+1}, P_q^{(n)} h_1 \otimes \cdots \otimes \widehat{h_k} \otimes \cdots \otimes h_{n+1} \rangle \\
= & \sum_{k=1}^{n} q^{k-1} \langle g_1, h_k \rangle \langle g_2 \otimes \cdots \otimes g_{n+1}, h_1 \otimes \cdots \otimes \widehat{h_k} \otimes \cdots \otimes h_{n+1} \rangle_q \\
= & \langle g_1 \otimes \cdots g_{n+1}, h_1 \otimes \cdots h_{n+1} \rangle_q \qquad \text{d'après (27).}
\end{aligned}$$

■

Proposition 3.23. *Pour $-1 \leq q < 1$, l'opérateur $c(f)$ sur $\mathcal{F}$ est continu, et sa norme est donnée par :*

$$||c(f)||_q = \frac{1}{\sqrt{1-q}} ||f||_{\mathcal{H}} \text{ si } 0 \leq q < 1, \qquad ||c(f)||_q = ||f||_{\mathcal{H}} \text{ si } -1 \leq q \leq 0.$$

Preuve. Remarquons que $\|c(f)\|_q = \|c^*(f)\|_q$.

Premier cas : $-1 \leq q \leq 0$. Pour $\xi \in \mathcal{F}$, on a :

$$\begin{aligned}
\langle c^*(f)\xi, c^*(f)\xi \rangle_q &= \langle f, f \rangle \langle \xi, \xi \rangle_q + q \langle c(f)\xi, c(f)\xi \rangle_q \\
&\leq \langle f, f \rangle \langle \xi, \xi \rangle_q.
\end{aligned}$$

Cela implique $\|c^*(f)\|_q \leq \|f\|_q$. Il y a même égalité, car $c^*(f)\Omega = f$.

Deuxième cas : $0 \leq q < 1$. En utilisant le lemme 3.22, le fait que $P_q^{(n+1)}$ est adjoint et que $\|R^{(n)}\| \leq 1/(1-q)$, pour $x \in \mathcal{F}$:

$$\begin{aligned}
\langle x, P_q^{(n+1)} P_q^{(n+1)} x \rangle &= \langle R^{(n)*}\left(1 \otimes P_q^{(n)}\right) x, R^{(n)*}\left(\mathrm{Id} \otimes P_q^{(n)}\right) x \rangle \\
&\leq \|R^{(n)*}\|_{\mathcal{H}}^2 \| \left(\mathrm{Id} \otimes P_q^{(n)}\right) x\|_{\mathcal{H}}^2 \\
&\leq \frac{1}{(1-q)^2} \left\langle x, \left(\mathrm{Id} \otimes P_q^{(n)}\right)\left(1 \otimes P_q^{(n)}\right) x \right\rangle
\end{aligned}$$

Comme $P_q^{(n+1)}$ et $\mathrm{Id} \otimes P_q^{(n)}$ sont positifs auto-adjoints, on en déduit que pour $x \in \mathcal{F}$:

$$\langle x, P_q^{(n+1)} x \rangle \leq \frac{1}{1-q} \left\langle x, \left(\mathrm{Id} \otimes P_q^{(n)}\right) x \right\rangle . \tag{35}$$

Pour démontrer ce passage, on pourra consulter le sujet d'examen [12] (problème, question 3). En définitive :

$$\begin{array}{rcl} \langle c^*(f)\xi, c^*(f)\xi \rangle_q & = & \langle f \otimes \xi, f \otimes \xi \rangle_q \\ & = & \langle f \otimes \xi, P_q^{(n+1)}(f \otimes \xi) \rangle \\ & \leq & \dfrac{1}{1-q} \langle f, f \rangle \langle \xi, P_q^{(n)} \xi \rangle \qquad \text{d'après (35),} \end{array}$$

ce qui démontre la continuité de $c^*(f)$. On voit de plus que $\|c^*(f)\|_q = 1/\sqrt{1-q}\|f\|_{\mathcal{H}}$ en utilisant le fait que $c^*(f)f^{\otimes n} = f^{\otimes(n+1)}$, et que grâce à (27) :

$$\langle f^{\otimes(n+1)}, f^{\otimes(n+1)} \rangle_q = (1 + q + \cdots + q^n) \langle f, f \rangle \langle f^{\otimes n}, f^{\otimes n} \rangle_q .$$

■

Les propositions 3.21 et 3.23 impliquent en définitive le théorème 3.1.

4 « Completely positive maps on Coxeter groups ... », d'après Bozejko et Speicher

4.1 Introduction et structure de la preuve

Nous nous intéressons maintenant à la deuxième preuve de Bozejko et Speicher [6]. Le résultat obtenu dans cet article est le suivant :

Théorème 4.1. *Soit q_{ij} des complexes tels que $q_{ij} = \overline{q_{ji}}$ et $\sup |q_{ij}| \leq 1$. Il existe un espace de Hilbert $\mathcal{E}$, un vecteur $\Omega \in \mathcal{E}$ et des opérateurs $\{a_i, i \in \mathbb{N}\}$ définis sur un sous-espace dense de $\mathcal{E}$ vérifiant les deux conditions suivantes :*

$$\begin{aligned} \forall i, j \in \mathbb{N}, \qquad & a_i a_j^* - q_{i,j} a_j^* a_i = \delta_{ij}, \\ \forall i \in \mathbb{N}, \qquad & a_i \Omega = 0, \end{aligned}$$

où a_i^* désigne l'opérateur adjoint de a_i.

Commençons par introduire nos outils de travail.

4.2 Groupes de Coxeter finis

On va donner ici quelques idées sur les groupes de Coxeter finis : d'abord leur intuition géométrique, puis quelques énoncés qui nous serviront par la suite. Toutes les propriétés et exemples sont donnés sans démonstration aucune. Pour une présentation plus formelle de ce sujet, nous renvoyons à [9] et [10].

4.2.1 Intuition géométrique

Soit un espace vectoriel de dimension fini V. Un groupe de Coxeter W sera un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_n(V)$ engendré par des réflexions s_i par rapport à des hyperplans H_i. Le fait de réclamer que W soit un groupe *fini* entraîne bien sûr des contraintes géométriques fortes sur les positions respectives des hypreplans H_i[28]. Considérons alors l'ensemble des hyperplans images des H_i par les éléments de W : ces hyperplans découpent l'espace V en demi-cônes[29] identiques. Au groupe de Coxeter W, on peut donc associer un pavage de V par des demi-cônes identiques. Un de ces demi-cônes se voit assez bien : ses bords sont les hyperplans H_i. Notons le $\mathcal{C}$. Et, il se trouve que l'action de W sur l'ensemble des cônes qui pavent est libre et transitive. On a donc une bijection entre les éléments de W et l'ensemble des demi-cônes, par l'application qui à w associe $w((C))$.

4.2.2 Quelques propriétés des groupes de Coxeter finis

Définition 4.2. On considère un ensemble fini $S = \{s_i\}$. On souhaite créer un groupe contenant S, tel que les s_i vérifient des relations de commutation particulières, du type $(s_i s_j)^{m_{ij}} = e$ - où e désigne l'élément neutre. En fait, étant donné des entiers m_{ij} tels que $m_{ii} = 1$[30], et $m_{ij} = m_{ji}$, on peut toujours trouver un groupe W engendré par S tels que les s_i vérifient les relations souhaitées, et seulement ces relations là (formellement, W est l'unique groupe à isomorphisme près vérifiant une certaine propriété universelle). On dit alors que (W, S) est un système de Coxeter.

[28] En dimension 2 par exemple, l'angle entre deux droites H_i devra être un multiple rationnel de π.
[29] Rappelons qu'un cône est un ensemble de droites, et n'est pas forcément à base circulaire.
[30] L'intuition géométrique veut en effet que les s_i soient des réflexions, donc d'ordre 2.

Remarque 4.3. Notons que la condition $m_{ii} = 1$ se réécrit $s_i = s_i^{-1}$.

Exemple 4.4. Les groupes de Coxeter dans leur formalisme semblent a priori bien abstraits. Certes. Cependant - et c'est la raison d'être de cet exemple - le groupe de permutation $\mathfrak{S}_n$ peut être vu comme un groupe de Coxeter. C'est d'ailleurs quasi-exclusivement à $\mathfrak{S}_n$ que nous appliquerons cette belle théorie.

Considérons les éléments suivants de $\mathfrak{S}_n$: pour $1 \leq i \leq n-1$, on note π_i la transposition qui échange i et $i+1$. Les relations sont alors les suivantes :

$$\pi_i^2 = Id, \quad \pi_i \pi_{i+1} \pi_i = \pi_{i+1} \pi_i \pi_{i+1} \text{ et } \pi_i \pi_j = \pi_j \pi_i \text{ pour } |i-j| \geq 2.$$

On a donc $m_{ij} = 2$ pour $|i-j| = 1$, et $m_i j = 3$ pour $|i-j| \geq 2$.

Revenons quelques instants aux groupes de Coxeter généraux : tout élément de W peut s'écrire (de plusieurs manières) comme produit d'éléments de S.

Définition 4.5. Soit $w \in W$. Parmi toutes les manières d'écrire w comme produit d'éléments de S, il en existe au moins une qui est de taille minimale. On appelle alors longueur de w - et on note $l(w)$ - la taille minimale des écritures de w[31]. On appellera écriture réduite de w toute écriture de w de taille minimale.

Exemple 4.6. Donnons quelques exemples sur notre groupe de Coxeter préféré, $\mathfrak{S}_n$.

- $l(Id) = 0$
- $l(\pi_i) = 1$
- $l(\pi_i \pi_{i+2}) = 2$
- $l(\pi_i \pi_{i+1} \pi_i \pi_{i+1}) = 2$ car $\pi_i \pi_{i+1} \pi_i \pi_{i+1} = \pi_i \pi_{i+1}$
  D'autre part, rappelons que le nombre d'inversion d'une permutation π est le cardinal de l'ensemble $\{(i,j), i < j \text{ et } \pi(i) > \pi(j)\}$. On fait alors le constat suivant : pour toute permutation $\pi \in \mathfrak{S}_n$, $l(\pi) = I(\pi)$.

On a la propriété suivante :

Proposition 4.7. *Soit W un groupe de Coxeter. Il existe un unique plus long élément $\sigma_0 \in W$*[32].

Attention : en dépit des apparences ce résultat est relativement non trivial.

Exemple 4.8. La permutation la plus longue de $\mathfrak{S}_n$ est la suivante :

$$\sigma_0 : i \mapsto n - i + 1.$$

4.2.3 Sous-groupes de Coxeter

Définition 4.9. On définit naturellement la notion de sous-groupe suivante : soit $J \subseteq S$. On note W_J le sous-groupe de W engendré par J. Alors (W_J, J) est un groupe de Coxeter.

Exemple 4.10. Le sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$ engendré par $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_{n-2}$ s'identifie à $\mathfrak{S}_{n-1}$.

[31] Elle correspond au nombre minimal de cônes que l'on doit traverser pour joindre $\mathcal{C}$ et $w(\mathcal{C})$.

[32] Cet élément correspond géométriquement à l'endomorphisme qui envoie tout demi-cône du pavage sur le demi-cône qui lui est opposé.

On va maintenant essayer de décomposer les éléments de W. On a donc besoin d'introduire des sous-ensembles de W.

Définition 4.11. Soit $J \subseteq S$. On pose $D_J := \{\sigma \in W, l(\sigma s) = l(\sigma) + 1,\ \forall s \in J\}$. On pose également $J_\sigma := \{s \in S, l(\sigma s) = l(\sigma) + 1\}$. Ainsi :

$$\sigma \in D_J \Leftrightarrow J \subseteq J_\sigma.$$

Remarque 4.12. Un élément de W, σ, appartient à D_J si et seulement si σ est le plus court élément du sous-ensemble σW_J. D_J est donc un système de représentants canonique des classes d'équivalence W/W_J.

On a la décomposition suivante :

Proposition 4.13. *Tout élément w de W s'écrit de manière unique sous la forme $w = \tau_J \sigma_J$, où $\tau_J \in D_J$ et $\sigma_J \in W_J$. De plus, $l(w) = l(\tau_J) + l(\sigma_J)$.*

Et pour terminer, une propriété qui nous servira par la suite :

Proposition 4.14. *On a la formule suivante - dont la preuve n'utilise que de la combinatoire :*

$$\sum_{J \subseteq S \text{ et } \sigma \in D_J} (-1)^{|J|} = \sum_{J \subseteq J_\sigma} (-1)^{|J|} = \begin{cases} 0 & si\ \sigma \neq \sigma_0 \\ 1 & si\ \sigma = \sigma_0. \end{cases}$$

où σ_0 désigne le plus long élément de W.

4.3 Résultat de positivité

On va s'intéresser à la positivité d'un certain opérateur P, défini à l'aide d'un groupe de Coxeter W. Dans un futur proche, cet opérateur P nous servira à définir un produit scalaire. On considère donc un système de Coxeter (W, S), où les relations de commutation $(s_i s_j)^{m_{ij}}$ sont vérifiées.

Définition 4.15. Soit un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. On note par $B(\mathcal{H})$ l'ensemble des endomorphismes continus de $\mathcal{H}$. On considère des opérateurs $T_i \in B(\mathcal{H})$ vérifiant les propriétés suivantes :

(i) $T_i^* = T_i$,

(ii) $\|T_i\| \leq 1$,

(iii) Les relations de commutation suivantes sont vérifiées :

$$(T_i T_j)^{mij} = Id.$$

On souhaite définir une fonction $\varphi : W \to B(\mathcal{H})$ ayant certaines propriétés. Procédons :

Proposition 4.16. *Il existe une unique application φ définie de la manière suivante :*

$$\varphi(e) = Id,\ \varphi(\pi_i) = T_i,$$

et, si $\sigma \in W$ admet comme écriture réduite $\sigma = s_{i(1)} s_{i(2)} \cdots s_{i(k)}$, alors

$$\varphi(\sigma) = T_{i(1)} T_{i(2)} \cdots T_{i(k)}.$$

On note de plus que $\varphi(\sigma)^* = \varphi(\sigma^{-1})$.

Preuve. La première assertion porte le doux nom de proposition 5 dans l'excellent ouvrage de Monsieur Nicolas Bourbaki [9].

La remarque finale découle du fait que, si $\sigma = s_{i(1)}s_{i(2)}\cdots s_{i(k)}$ est une écriture réduite de σ, alors $\sigma^{-1} = s_{i(k)}s_{i(k-1)}\cdots s_{i(1)}$ est une écriture réduite de σ^{-1}. ∎

Enonçons maintenant le résultat central de cette partie. Ce qui suivra aura pour unique but d'en mettre en place une preuve :

Théorème 4.17. *L'opérateur de $B(\mathcal{H})$:*

$$P := \sum_{\sigma \in W} \varphi(\sigma)$$

est positif, c'est-à-dire que pour tout $x \in \mathcal{H}$, $\langle P(x), x\rangle \geq 0$.

On peut se ramener au théorème suivant :

Théorème 4.18. *On met l'hypothèse supplémentaire suivante sur les opérateurs T_i :*

$$\forall i \ \|T_i\| < 1.$$

Alors l'opérateur :

$$P := \sum_{\sigma \in W} \varphi(\sigma)$$

est strictement positif, c'est-à-dire que pour tout $x \in \mathcal{H}$ non nul, $\langle P(x), x\rangle > 0$.

Preuve de 4.18 ⇒ 4.17 On considère les opérateurs $T_i^{(t)} := tT_i$. Les $T_i^{(t)}$ vérifient alors les hypothèses du théorème 4.18. Ainsi, l'opérateur :

$$P^{(t)} = \sum_{\sigma \in W} \varphi(\sigma) t^{l(\sigma)}$$

est strictement positif pour tout $0 \leq t < 1$. Si on fait tendre t vers 1, les opérateurs P^t convergent au sens de la norme uniforme vers P. En particulier, P est positif.

∎

L'assertion de positivité du théorème 4.18 peut se ramener - par continuité - à une assertion d'inversibilité[33].

Théorème 4.19. *Soient des opérateurs T_i tels que $\|T_i\| < 1$. On construit l'application φ et l'opérateur P comme précédemment. Alors P est inversible.*

D'après la propriété 4.16, notons que l'opérateur P est auto-adjoint. En effet :

$$P^* = \sum_{\sigma \in W} \varphi(\sigma)^* = \sum_{\sigma \in W} \varphi(\sigma^{-1}) = P$$

On va donc énoncer quelques propriétés sur les opérateurs auto-adjoints qui permettront de faire le lien entre les théorèmes 4.19 et 4.18 :

[33]Ce schéma de preuve ressemble à celui de l'article de Zagier : voir la proposition 2.29

Proposition 4.20. *Soit $A \in B(\mathcal{H})$. On appelle spectre de A l'ensemble :*

$$\{\lambda \in \mathbb{C}, A - \lambda Id \text{ est non inversible}\}.$$

Si A est auto-adjoint, le spectre de A est inclus dans $\mathbb{R}$, et le réel :

$$m_0(A) = inf\,\{\langle Ax, x\rangle, x \in \mathcal{H} \text{ et } \|x\| = 1\}$$

est le plus petit élément du spectre de A.

Preuve. Nous renvoyons le lecteur à son cours de théorie spectrale préféré. ■

Lemme 4.21. *Soient $A, B \in B(\mathcal{H})$ deux opérateurs auto-adjoints. Alors :*

$$|m_0(A) - m_0(B)| \leq \|A - B\|.$$

Preuve. On peut supposer $m_0(B) \geq m_0(A)$. Soit $\epsilon > 0$. On peut trouver $x \in \mathcal{H}$ de norme 1 tel que $m_0(B) \geq \langle Bx, x\rangle - \epsilon$. On a de plus $m_0(A) \leq \langle Ax, x\rangle$.

On a alors les inégalités suivantes :

$$|m_0(A) - m_0(B)| \leq \langle Ax, x\rangle - \langle Bx, x\rangle + \epsilon = \langle (A - B)x, x\rangle + \epsilon \leq \|A - B\|$$

Ceci étant vrai pour tout ϵ, on a donc $|m_0(A) - m_0(B)| \leq \|A - B\|$. ■

Preuve de 4.19 $\Rightarrow$ 4.18 On considère encore une nouvelle fois les opérateurs $T_i^{(t)} := tT_i$ pour $0 \leq t \leq 1$, et les opérateurs $P^{(t)} = \sum_{\sigma \in W} \varphi(\sigma) t^{l(\sigma)}$. Or, l'application $t \mapsto P^{(t)}$ est continue. D'après le lemme 4.21, l'application $t \mapsto m_0(P^{(t)})$ est donc continue. Or, l'inversibilité de $P^{(t)}$ - découlant du théorème 4.19 - implique que $m_0(P^{(t)}) \neq 0$: en effet, $m_0(P^{(t)}) = 0$ entraînerait que 0 soit dans le spectre de P - d'après la propriété 4.20. Ce qui est impossible si P est inversible. Or, $m_0(Id) = m_0(P^{(0)}) = 1 < 0$. Ainsi, $m_0(P^{(t)}) > 0$ pour tout t par continuité. En particulier, $m_0(P) > 0$. Ce qui est exactement dire que P est strictement positif. ■

On va maintenant énoncer un dernier lemme, qui nous permettra de montrer enfin l'inversibilité de P ... et donc d'avoir la preuve du théorème 4.17.

On pose désormais, pour un sous-ensemble $A \subseteq W$, $P(A) = \sum_{\sigma \in A} \varphi(\sigma)$. En particulier, $P = P(W)$.

Lemme 4.22. *Soit (W, S) un groupe de Coxeter fini. Soit π_0 l'unique plus long élément de W. Alors, on a l'égalité suivate :*

$$\sum_{J \subseteq S} (-1)^{|J|} P(D_J) = \varphi(\pi_0).$$

Preuve. En effet, on peut faire les calculs suivants - en pensant à utiliser la formule 4.14 :

$$\begin{aligned}
\sum_{J \subseteq S} (-1)^{|J|} P(D_J) &= \sum_{J \subseteq S} (-1)^{|J|} \sum_{\pi \in D_J} \varphi(\pi) \\
&= \sum_{\pi \in W} \left(\sum_{J \subseteq J_\pi} (-1)^{|J|} \right) \varphi(\pi) \\
&= \varphi(\pi_0).
\end{aligned}$$

■

Preuve du théorème 4.19 On va prouver ce résultat par récurrence sur le cardinal de S. Pour $|S| = 0$, $W = \{e\}$. Ainsi, $P = Id$. Pour $|S| = 1$, $W = \{e, s_1\}$. Ainsi, $P = Id + T_1$. Or $\|T_1\| < 1$: P est donc inversible.

On suppose maintenant savoir que $P(\tilde{W})$ est inversible pour tout groupe de Coxeter tel que $|\tilde{S}| \leq n-1$. On considère un groupe de Coxeter W tel que $|S| = n$. On a pour tout $J \subset S$ - l'inclusion est stricte - l'égalité $P(W) = P(D_J)P(W_J)$, qui résulte de la propriété de décomposition 4.13 et de la définition de l'application φ. Ainsi, on a $P(W)P(W_J)^{-1} = P(D_J)$.

Par le lemme 4.22, on a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} P(W)\left(\sum_{J\subset S}(-1)^{|J|}P(W_J)^{-1}\right) &= \sum_{J\subset S}(-1)^{|J|}P(D_J) \\ &= \varphi(\sigma_0) - (-1)^{|S|}P(D_S) \\ &= \varphi(\sigma_0) - (-1)^{|S|}Id. \end{aligned}$$

Comme $\|\varphi(\sigma_0)\| < 1$, l'élément $\varphi(\sigma_0) - (-1)^{|S|}Id$ est inversible. Alors :

$$P(W)\left(\sum_{J\subset S}(-1)^{|J|}P(W_J)^{-1}\right)(\varphi(\sigma_0) - (-1)^{|S|}Id)^{-1} = Id,$$

et $P = P(W)$ est donc inversible à droite. Comme $P = P^*$, P est également inversible à gauche, donc inversible. ■

4.4 Conclusion

4.4.1 Traitons un cas plus général

On va utiliser un formalisme proche de l'autre article de Bozejko et Speicher, [5]. Nous travaillons donc sur l'espace $\mathcal{F} = \bigoplus \mathcal{H}^{\otimes n}$, où $\mathcal{H}^{\otimes 0} = \mathbb{C}\Omega$.

On considère alors un opérateur $T \in B(\mathcal{H}\otimes\mathcal{H})$, tel que T soit un contraction auto-adjointe : $\|T\| \leq 1$ et $T^* = T$. On suppose de plus que T vérifie les relations suivantes :

$$(Id\otimes T)(T\otimes Id)(Id\otimes T) = (T\otimes Id)(Id\otimes T)(T\otimes Id),$$

où $(T\otimes Id)$ et $(Id\otimes T)$ sont naturellement définies sur $\mathcal{H}\otimes\mathcal{H}\otimes\mathcal{H}$.

Définition 4.23. Définissons alors pour tout i un opérateur T_i sur les espaces $\mathcal{H}^{\otimes n}$ tels que $n \geq i+1$, de la manière suivante :

$$T_i = \underbrace{Id\otimes\cdots\otimes Id}_{i-1 fois}\otimes T\otimes\underbrace{Id\otimes\cdots\otimes Id}_{n-i-1 fois}.$$

Proposition 4.24. *Là où ils sont définis, les opérateurs T_i vérifient les relations de commutation suivantes :*

$$T_iT_{i+1}T_i = T_{i+1}T_iT_{i+1} \text{ et } T_iT_j = T_jT_i \text{ pour } |i-j| \geq 2.$$

Notons que ces relations sont celles vérifiées par les générateurs des groupe de Coxeter $\mathfrak{S}_n$ (voir l'exemple 4.4). Ainsi, en prenant les opérateurs T_i pour $1 \leq i \leq n$ vérifient les hypothèses (écrites en 4.15) nécessaires pour appliquer le théorème de positivité 4.17 avec $W = \mathfrak{S}_n$.

On va maintenant définir pour tout $f \in \mathcal{H}$ des opérateurs de création et d'annihilation sur $\mathcal{F}$. Notons la similitude avec la définition 3.4.

Définition 4.25. Définissons dans un premier temps des opérateurs création $b(f)$ et annihilation $b(f)^*$ dit libres :

$$\begin{aligned} b(f)^*\Omega = f, \qquad & b^*(f)\,[h_1 \otimes \cdots \otimes h_n] = f \otimes h_1 \otimes \cdots \otimes h_n, \\ \text{et } b(f)\Omega = 0, \qquad & b(f)\,[h_1 \otimes \cdots \otimes h_n] = \langle f, h_1\rangle h_2 \otimes \cdots \otimes h_n. \end{aligned}$$

Remarquons que les opérateurs libres $b(f)$ et $b^*(f)$ sont adjoints l'un de l'autre pour le produit scalaire usuel. Déformons maintenant ces opérateurs libres comme suit :

$$\begin{aligned} c(f)^* &:= b(f)^*, \\ \text{et } c(f) &:= b(f)(Id + T_1 + T_1T_2 + \ldots + T_1T_2 \cdots T_{n-1}) \ \text{ sur } \mathcal{H}^{\otimes n}. \end{aligned}$$

Malheureusement, $c(f)$ et $c^*(f)$ ne sont plus adjoints l'un de l'autre pour le produit scalaire usuel de $\mathcal{F}$. On cherche donc à définir un autre produit scalaire sur $\mathcal{F}$.

Définition 4.26. Définissons l'opérateur $P^{(n)} = \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} \varphi(\pi) \in B(\mathcal{H}^{\otimes n})$, où l'application φ est celle définie par la propriété 4.16.

Pour $g \in \mathcal{H}^{\otimes n}$ et $h \in \mathcal{H}^{\otimes m}$, on pose $\langle g, h\rangle_T = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ \langle g, P^{(n)}h\rangle & \text{sinon} \end{cases}$.

On prolonge $\langle \cdot, \cdot\rangle_T$ en une forme hermitienne sur $\mathcal{F}$.

Notons que par le théorème 4.17, la forme hermitienne $\langle \cdot, \cdot\rangle_T$ est positive. Quitte à quotienter par son noyau (voir le lemme 2.39), on a affaire à un produit scalaire.

Proposition 4.27. *Pour tout $f \in \mathcal{H}$, les opérateurs $c(f)$ et $c^*(f)$ sont conjugués par $\langle \cdot, \cdot\rangle_T$.*

Preuve. D'après la définition de T_i, on a :

$$b^*(f)T_i = T_{i+1}b^*(f).$$

On déduit de cette égalité que :

$$b^*(f)P^{(n)} = (Id \otimes P^{(n)})b^*(f).$$

En passant à l'adjoint (rappelons que l'opérateur $P^{(n)}$ est auto-adjoint), on obtient :

$$P^{(n)}b(f) = b(f)(Id \otimes P^{(n)}). \tag{36}$$

D'autre part, avec $W = \mathfrak{S}_{n+1}$, $J = \{\pi_2, \ldots \pi_n\}$, W_J s'identifie à $\mathfrak{S}_n$, et :

$$D_J = \{e, \pi_1, \pi_2\pi_1, \ldots , \pi_n\pi_{n-1} \cdots \pi_1\}.$$

En écrivant $P(W) = P(D_J)P(W_J)$, on obtient donc :

$$P^{(n+1)} = P(\mathfrak{S}_{n+1}) = R^{(n+1)*}(Id \otimes P^{(n)}), \tag{37}$$

où on aura posé :

$$R^{(n)} := Id + T_1 + T_1T_2 + \ldots + T_1 \cdots T_{n-2}T_{n-1}. \tag{38}$$

Notons au passage que :

$$c(f) = b(f)R^{(n)} \text{ sur } \mathcal{H}^{\otimes n}, \tag{39}$$

par définition. Passons alors à l'adjoint l'équation (37) :

$$P^{(n+1)} = (Id \otimes P^{(n)})R^{(n+1)}. \tag{40}$$

Utilisons alors successivement le fait que $c^*(f) = b^*(f)$ et $b(f)$ sont adjoints, l'égalité (40), l'identité (36), et la vérité (39) pour mener le calcul suivant, où $g \in \mathcal{H}^{\otimes n}$ et $h \in \mathcal{H}^{\otimes(n+1)}$:

$$\begin{aligned}
\langle c^*(f)g, h\rangle_T &= \langle c^*(f)g, P^{(n+1)}h\rangle \\
&= \langle g, b(f)P^{(n+1)}h\rangle \\
&= \langle g, b(f)(Id \otimes P^{(n)})R^{(n+1)}h\rangle \\
&= \langle g, P^{(n)}b(f)R^{(n+1)}h\rangle \\
&= \langle g, P^{(n)}c(f)h\rangle \\
&= \langle g, c(f)h\rangle_T,
\end{aligned}$$

d'où le résultat. ■

Considérons maintenant un espace de Hilbert séparable $\mathcal{H}$, et une base hilbertienne $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{H}$. Un opérateur $T \in B(\mathcal{H} \otimes \mathcal{H})$ peut alors s'écrire matriciellement sous la forme :

$$T(e_a \otimes e_b) = \sum_{c,d\in\mathbb{N}} t_{ab}^{cd} e_c \otimes e_d$$

Supposons que T vérifie les hypothèses que l'on souhaite : $\|T\| \leq 1$, $T^* = T$ et la relation de commutation $(Id \otimes T)(T \otimes Id)(Id \otimes T) = (T \otimes Id)(Id \otimes T)(T \otimes Id)$. On pose alors $a_i := c(e_i)$, et on munit $\mathcal{H}$ du produit scalaire associé à T.

Proposition 4.28. *Les relations de commutation suivantes sont vérifiées :*

$$a_i a_j^* - \sum_{r,s\in\mathbb{N}} t_{js}^{ir} a_r^* a_s = \delta_{ij}.$$

Preuve. Considérons un vecteur $v \in \mathcal{H}^{\otimes(n)}$. Il suffit de montrer que :

$$a_i a_j^*[v] = \sum_{r,s\in\mathbb{N}} t_{js}^{ir} a_r^* a_s[v] + \delta_{ij}\,[v].$$

Or $a_i a_j^*$ agit par définition comme $b(e_i)R^{(n+1)}b(e_j)^*$ sur $\mathcal{H}^{\otimes(n)}$. De plus, l'identité $R^{(n+1)} = Id + T_1(Id \otimes R^{(n)})$ découle de l'expression 38. Ainsi, sur $\mathcal{H}^{\otimes(n)}$:

$$a_i a_j^* = b(e_i)b(e_j)^* + b(e_i)T_1(Id \otimes R^{(n)})b(e_j)^*.$$

Or $b(e_i)b(e_j)^* = \delta_{ij} Id$. Ainsi, il suffit de montrer que :

$$b(e_i)T_1(Id \otimes R^{(n)})b(e_j)^*[v] = \sum_{r,s\in\mathbb{N}} t_{js}^{ir} a_r^* a_s[v].$$

Or, par définition, $a_r^* a_s$ agit comme $b(e_r)^* b(e_s)R^{(n)}$ sur $\mathcal{H}^{\otimes(n)}$. D'autre part $(Id \otimes R^{(n)})b(e_j)^* = b(e_j)^* R^{(n)}$.

On veut donc montrer que :

$$b(e_i)T_1 b(e_j)^* R^{(n)}[v] = \sum_{r,s\in\mathbb{N}} t^{ir}_{js} b(e_r)^* b(e_s) R^{(n)}[v].$$

Par le changement de variable $v' = R^{(n)}[v]$, et par linéarité, il suffit de montrer que :

$$b(e_i)T_1 b(e_j)^*[e_a \otimes v] = \sum_{r,s\in\mathbb{N}} t^{ir}_{js} b(e_r)^* b(e_s)[e_a \otimes v]$$

pour tout vecteur de la forme $e_a \otimes v \in \mathcal{H}^{(n)}$. Or :

$$b(e_j)^*[e_a \otimes v] = e_j \otimes e_a \otimes v.$$

D'où :

$$T_1[e_j \otimes e_a \otimes v] = [\sum_{c,d\in\mathbb{N}} t^{cd}_{ja} e_c \otimes e_d] \otimes v.$$

Ainsi :

$$b(e_i)T_1 b(e_j)^*[e_a \otimes v] = [\sum_{d\in\mathbb{N}} t^{id}_{ja} e_d] \otimes v.$$

Or :

$$\sum_{r,s\in\mathbb{N}} t^{ir}_{js} b(e_r)^* b(e_s)[e_a \otimes v] = \sum_{r,s\in\mathbb{N}} t^{ir}_{ja} e_r \otimes v,$$

ce qui est le résultat souhaité.

En conclusion, on a bien la relation de commutation suivante :

$$a_i a_j^* - \sum_{r,s\in\mathbb{N}} t^{ir}_{js} a_r^* a_s = \delta_{ij}.$$

■

4.4.2 Revenons à nos relations de commutation

On considère alors l'opérateur $Q \in B(\mathcal{H})$ tel que $B(e_i \otimes e_j) = q_{ji} e_j \otimes e_i$. On vérifie que, si les q_{ij} vérifient les deux conditions suivantes : $q_{ij} = \overline{q_{ji}}$ et $\sup |q_{ij}| \leq 1$, alors Q est une contraction auto-adjointe vérifiant les relations de commutation que l'on souhaite. En reprenant les notations précédentes (avec t^{ir}_{js}), on a dans les cas de l'opérateur Q :

$$t^{ir}_{js} = q_{ij}\delta_{jr}\delta_{is}$$

Et les relations de commutations liant les opérateurs a_i et a_j deviennent donc :

$$a_i a_j^* - q_{ij} a_j^* a_i = \delta_{ij}.$$

Nous avons donc le résultat suivant :

Théorème 4.29. *Soit q_{ij} des complexes tels que $q_{ij} = \overline{q_{ji}}$ et $\sup |q_{ij}| \leq 1$. Il existe un espace de Hilbert $\mathcal{E}$, un vecteur $\Omega \in \mathcal{E}$ et des opérateurs $\{a_i, i \in \mathbb{N}\}$ définis sur un sous-espace dense de $\mathcal{E}$ vérifiant les deux conditions suivantes :*

$$\forall i,j \in \mathbb{N}, \qquad a_i a_j * - q_{ij} a_j^* a_i = \delta_{ij},$$
$$\forall i \in \mathbb{N}, \qquad a_i \Omega = 0,$$

où a_i^* désigne l'opérateur adjoint de a_i.

5 « Generalized statistics of macroscopic fields », d'après Speicher

5.1 Introduction et structure de la preuve

Nous nous intéressons finalement à la preuve de Speicher [7], qui est la plus récente (1993). Elle possède la particularité d'aborder celui-ci d'un angle différent et utilise un peu de théorie des probabilités (lemme de Borel-Cantelli). Le résultat principal est le suivant.

Théorème 5.1. *Soient $\{q_{ij}; i,j \in \mathbb{N}\}$ des réels compris au sens large entre -1 et 1. Soit $\mathcal{A}$ la $*-$algèbre unitaire (voir définition 2.4) engendrée par $\{a_i, a_i^*; i \in \mathbb{N}\}$. Alors il existe un opérateur ρ sur $\mathcal{A}$ vérifiant $\rho(xx^*) \geq 0$ pour tout $x \in \mathcal{A}$ et tel que :*

$$\forall P, Q \in \mathcal{A}, \qquad \rho(Pa_i a_j^* Q) = q_{ij}\rho(Pa_j^* a_i Q) + \delta_{ij}\rho(PQ).$$

Nous verrons que ce théorème a pour conséquence :

Corollaire 5.2. *Il existe un espace de Hilbert $\mathcal{E}$, un vecteur $\Omega \in \mathcal{E}$ et des opérateurs $\{a_i, i \in \mathbb{N}\}$ définis sur un sous-espace dense de $\mathcal{E}$ vérifiant les deux conditions suivantes :*

$$\forall i,j \in \mathbb{N}, \qquad a_i a_j^* - q_{ij} a_j^* a_i = \delta_{ij}, \tag{41}$$

$$\forall i \in \mathbb{N}, \qquad a_i \Omega = 0. \tag{42}$$

L'idée de la preuve consiste à partir d'opérateurs vérifiant les relations de commutation canoniques ($q_{ij} = \pm 1$) et à construire $\mathcal{E}$ ainsi que a_i, a_i^* comme « limite » (en un sens à préciser) des premiers opérateurs. La forme sesquilinéaire hermitienne « limite » sur $\mathcal{E}$ va alors être limite simple de produits scalaires, donc va nécessairement être positive. La difficulté n'est donc pas l'étude de la positivité de quelque chose, mais survient lorsqu'on veut montrer que cette « limite » existe.

5.2 Définition d'un état particulier

Les opérateurs de base nous sont fournis par la propriété suivante[34] :

Proposition 5.3. *Soient $\{s_{ij}^{kl}; i,j,k,l \in \mathbb{N}\}$ des entiers égaux à $+1$ ou -1, tels que $s_{ij}^{kl} = s_{ji}^{kl}$ et $s_{ij}^{kl} = s_{ij}^{lk}$. Il existe un espace de Hilbert $\mathcal{F}$, un vecteur $\Omega \in \mathcal{F}$ et des opérateurs $\{b_i^{(k)}; i,k \in \mathbb{N}\}$ vérifiant les conditions suivantes :*

$$\forall i,k \in \mathbb{N} \quad , \qquad b_i^{(k)}\Omega = 0, \tag{43}$$

$$\forall i,j,k,l \in \mathbb{N} \ t.q.\ (i,k) \neq (j,l) \quad , \qquad b_i^{(k)} b_j^{(l)} = s_{ij}^{kl}\, b_j^{(l)} b_i^{(k)} \quad et \quad b_i^{(k)} b_j^{(l)*} = s_{ij}^{kl}\, b_j^{(l)*} b_i^{(k)}, \tag{44}$$

$$\forall i,k \in \mathbb{N} \quad , \qquad \|b_i^{(k)*}\Omega\| = 1. \tag{45}$$

De plus, en notant $\mathcal{B}$ la $*-$algèbre libre engendrée par les opérateurs $\{b_i^{(k)}; i,k \in \mathbb{N}\}$, $\mathcal{B}_i$ la $*-$algèbre libre engendrée par les opérateurs $\{b_i^{(k)}; k \in \mathbb{N}\}$ et $\phi(b) = \langle \Omega, b\Omega \rangle$, nous avons[35] :

$$\phi(a_{i(1)} \cdots a_{i(r)}) = \phi(a_{i(1)}) \cdots \phi(a_{i(r)}), \tag{46}$$

pour tous $r \in \mathbb{N}$, $a_{i(k)} \in \mathcal{B}_{i(k)}$. On dit que ϕ se factorise sur un ensemble ordonné de *$\mathcal{A}$.*

[34] Speicher n'inclut pas les équations (45) et (46) dans les hypothèses de sa proposition. Elles nous semblent cependant indispensables.

[35] Cette condition est fondamentale.

Preuve. Dans l'article étudié [7], Speicher donne un argument physique et renvoit le lecteur à [8] pour une preuve. Un cas moins général y est traité. On peut se convaincre de la véracité de ce résultat en invoquant le théorème 4.29 de la section précédente. ■

Définition 5.4. Un *état* ρ sur une $*-$algèbre $\mathcal{A}$ est une forme linéaire positive, au sens où :

$$\forall x \in \mathcal{A}, \qquad \rho(x^*x) \geq 0.$$

Nous construirons un produit scalaire en posant $\langle x, y\rangle = \rho(x^*y)$, ce qui motive l'introduction de cette notion.

Remarque 5.5. Notons que ϕ est un état : cela découle de sa définition.

Remarque 5.6. De plus $(x,y) \mapsto \phi(x^*y)$ définie sur $\mathcal{B}\times\mathcal{B}$ est une forme sesquilinéaire à symétrie hermitienne définie positive : cela découle de la définition de ϕ.

Remarque 5.7. On a, d'après les équations (43), (44) et (45) :

$$\forall i,j,k,l \in \mathbb{N}, \qquad \phi(b_i^{(k)}b_j^{(l)}) = \phi(b_i^{(k)*}b_j^{(l)}) = \phi(b_i^{(k)*}b_j^{(l)*}) = 0, \qquad \phi(b_i^{(k)}b_j^{(l)*}) = \delta_{kl}\delta_{ij}.$$

Définition 5.8. [Définition d'un état particulier] On pose[36] :

$$a_i^{(N)} = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k=1}^{N} b_i^{(k)}, \qquad a_i^{(N)*} = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k=1}^{N} b_i^{(k)*}.$$

On *suppose* que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $\psi_1, \ldots, \psi_n \in \mathbb{N}$, la limite[37] :

$$\lim_{N\to+\infty} \phi\left(a_{\psi_1}^{(N)\#}\cdots a_{\psi_n}^{(N)\#}\right) \tag{47}$$

existe, où # indique que l'on peut mettre une $*$ ou rien à sa place.

Comme dans la proposition 2.5, on considère $\mathcal{A}$, la $*-$algèbre unitaire engendrée par l'alphabet $\{a_i, a_i^* |\ i \in \mathbb{N}\}$. On définit alors la forme linéaire ρ par[38] :

$$\rho\left(a_{\psi(1)}^{\#}\cdots a_{\psi(n)}^{\#}\right) = \lim_{N\to+\infty} \phi\left(a_{\psi(1)}^{(N)\#}\cdots a_{\psi(n)}^{(N)\#}\right). \tag{48}$$

Nous dirons que ρ est un *état effectif*.

Proposition 5.9. *Sous l'hypothèse d'existence des limites sus-mentionnées, ρ est un état sur $\mathcal{A}$.*

Preuve. C'est une conséquence de la remarque 5.5 et de (48). ■

---

[36]Intuitivement, $a_i^{(N)}$ et $a_i^{(N)*}$ sont des opérateurs moyennés.

[37]Intuitivement, ϕ est une « loupe » qui nous permet de voir ce qui se passe abstraitement dans la $*-$algèbre.

[38]Notons que ρ est défini sur l'$*-$algèbre $\mathcal{A}$, qui n'a pas de lien de parenté avec l'$*-$algèbre $\mathcal{B}$. Par exemple, $a_{\psi_1} \in \mathcal{A}$ mais $a_{\psi_1}^{(N)} \in B_{\psi_1}$.

5.3 Condition d'existence de l'état particulier

Le but est de donner une condition d'existence des limites précédentes. À cet effet, nous introduisons quelques notions sur les partitions. Par commodité, nous noterons $[n] = \{1, \ldots, n\}$.

Définition 5.10. $\mathcal{V} = \{V_1, \ldots, V_p\}$ est une *partition* de $[n]$ si les $\mathcal{V}_i$ sont des ensembles ordonnés disjoints avec $\cup_{i=1}^p \mathcal{V}_i = [n]$. On note alors $\mathcal{V} \in \mathcal{P}(1, \ldots, n)$. Soit $n = 2r$ un entier pair. On définit $\mathcal{P}_2(1, \ldots, n)$ comme l'ensemble des partitions de $\{1, \ldots, n\}$ en couples. Autrement dit, $\mathcal{V} \in \mathcal{P}_2(1, \ldots, n)$ si on peut écrire $\mathcal{V} = \{\mathcal{V}_1, \ldots, \mathcal{V}_p\}$ où les $\mathcal{V}_i$ sont des ensembles non vides ordonnés à deux éléments tels que $\cup_{i=1}^p V_i = [n]$. On écrira $\mathcal{V}_i = (e_i, z_i)$ avec $e_i < z_i$.

Pour $\mathcal{V} \in \mathcal{P}_2(1, \ldots, n)$, on définit *l'ensemble des inversions* de $\mathcal{V}$ par :

$$I(\mathcal{V}) = \{(i,j) \mid i, j \in [r],\, e_i < e_j < z_i < z_j\}.$$

Si $I(\mathcal{V}) = \emptyset$, on dit que $\mathcal{V}$ est *admissible*[39].

Exemple 5.11. Pour $n = 6$ et $\mathcal{V} = \{(1,3), (2,5), (4,6)\}$, on trouve $I(\mathcal{V}) = \{(1,2), (2,3)\}$.

Le théorème suivant donne la condition recherchée.

Théorème 5.12. *On considère les opérateurs de base donnés par la proposition 5.3. Si pour tous $r \in \mathbb{N}$, $\mathcal{V} \in \mathcal{P}_2(1, \ldots, 2r)$ et $\psi(1), \ldots, \psi(r) \in \mathbb{N}$ la limite suivante existe*[40 41] *:*

$$t(\mathcal{V})[\psi(1), \ldots, \psi(r)] := \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N^r} \sum_{\substack{k_1, \ldots, k_r = 1 \\ k_i \neq k_j \ si \ i \neq j}}^{N} \prod_{(i,j) \in \mathcal{I}(\mathcal{V})} s_{\psi(i), \psi(j)}^{k_i, k_j}, \tag{49}$$

alors les limites de l'équation (47) existent, ce qui implique l'existence d'un état effectif ρ au sens de la définition 5.8.

De plus, dans ce cas, ρ est déterminé par les relations suivantes. Pour $i, j \in \mathbb{N}$:

$$\rho(a_i a_j) = \rho(a_i^* a_j) = \rho(a_i^* a_j^*) = 0, \qquad \rho(a_i a_j^*) = \delta_{ij}. \tag{50}$$

Si n est impair*, pour $\psi(1), \ldots, \psi(n) \in \mathbb{N}$:*

$$\rho(a_{\psi(1)}^{\#} \cdots a_{\psi(n)}^{\#}) = 0. \tag{51}$$

Sinon, pour tous $r \in \mathbb{N}$ et $\psi(1), \ldots, \psi(2r) \in \mathbb{N}$:

$$\rho(a_{\psi(1)}^{\#} \cdots a_{\psi(2r)}^{\#}) = \sum_{\substack{\mathcal{V} = \{(e_1, z_1), \ldots, (e_r, z_r)\} \\ \in \mathcal{P}_2(1, \ldots, 2r)}} \rho\left(a_{\psi(e_1)}^{\#} a_{\psi(z_1)}^{\#}\right) \cdots \rho\left(a_{\psi(e_r)}^{\#} a_{\psi(z_r)}^{\#}\right) \cdot t(\mathcal{V})[\psi(e_1), \ldots, \psi(e_r)]. \tag{52}$$

[39] On peut donner une interpretation géométrique de $I(\mathcal{V})$: on place des points régulièrement espacés sur une droite correspondant aux entiers de $[n]$ et on relie e_i à z_i par un demi-cercle. Une inversion correspond à l'intersection de deux tels demi-cercles.

[40] Cette caractérisation est bien meilleure : seules les données initiales, à savoir les nombres s_{ij}^{kl} , interviennent.

[41] Si $\mathcal{V}$ est admissible, on pose $t(\mathcal{V})[\psi(1), \ldots, \psi(r) = 1$.

Ces équations semblent sorties du chapeau. Nous verrons qu'il n'en est rien, et que l'expression de $t(\mathcal{V})$ intervient naturellement lorsqu'on utilise les relations de commutation comme il faut.

Précisons que Speicher ne fait pas la démonstration : il dit, à juste titre, qu'elle est très proche de celle du théorème 1 de [8]. Nous nous proposons donc de démontrer le théorème 5.12. Nous avons d'abord besoin de quelques résultats préliminaires avant d'attaquer la démonstration.

Remarque 5.13. Soient $r = 2n$ et $\mathcal{V} = \{(e_1, z_1), \dots, (e_n, z_n)\} \in \mathcal{P}_2(1, \dots, n)$ admissible. En utilisant par exemple l'interprétation géométrique des inversions, on voit qu'il existe l tel que $z_l = e_l + 1$ et $\mathcal{V}\backslash(e_l, z_l)$, interprété comme partition de $[r-2]$, est admissible.

Définition 5.14. Soient $\mathcal{V} = \{V_1, \dots, V_p\}$ une partition de $[n]$ et $(k_1, \dots k_n)$ un n-uplet. On note $(k_1, \dots, k_n) \in \mathcal{V}$ si[42] :

$$\forall i, j, \qquad k_i = k_j \Leftrightarrow i, j \text{ appartiennent à un même } V_r.$$

Preuve du théorème 5.12. Il s'agit de calculer, pour n et $\psi(1), \dots, \psi(n) \in \mathbb{N}$:

$$M_N := \phi\left(a_{\psi(1)}^{(N)\#} \cdots a_{\psi(n)}^{(N)\#}\right) = \frac{1}{N^{n/2}} \sum_{k_1,\dots,k_n=1}^{N} \phi\left(b_{\psi(1)}^{(k_1)\#} \cdots b_{\psi(n)}^{(k_n)\#}\right).$$

D'une part, dans le cas $n = 2$, on voit que les équations (50) sont une conséquence de la remarque 5.7. D'autre part, dans le cas général, l'idée est d'utiliser les relations de commutation de base afin de mettre l'argument de ϕ sous une forme ordonnée (voir (46)) qui permet de factoriser par ϕ.

On écrit ensuite :

$$\sum_{k_1,\dots,k_n=1}^{N} = \sum_{k_1,\dots,k_n=1}^{N} \sum_{\mathcal{V}\in\mathcal{P}(1,\dots,n)} \mathbb{1}_{(k_1,\dots,k_n)\in\mathcal{V}},$$

de sorte qu'après interversion des sommations :

$$M_N = \sum_{\mathcal{V}\in\mathcal{P}(1,\dots,n)} \frac{1}{N^{n/2}} \sum_{\substack{k_1,\dots,k_n=1\\(k_1,\dots k_n)\in\mathcal{V}}}^{N} \phi\left(b_{\psi(1)}^{(k_1)\#} \cdots b_{\psi(n)}^{(k_n)\#}\right).$$

Nous nous intéressons maintenant à la dernière somme ($\mathcal{V}$ étant considéré comme fixé).

Remarque 1. Si $V = \{V_1, \dots, V_p\}$ et s'il existe j tel que V_j soit de cardinal 1, alors $b_\bullet^{(j)\#}$ commute ou anti-commute avec tout le monde, et on peut l'amener en première ou en dernière position. Comme $\phi(b) = \langle\Omega, b\Omega\rangle$, d'après (43), il vient :

$$\phi\left(b_{\psi(1)}^{(k_1)\#} \cdots b_{\psi(n)}^{(k_n)\#}\right) = 0.$$

On peut donc supposer $V = \{V_1, \dots, V_p\}$ avec pour tout j, $|V_j| \geq 2$, ce qui implique en particulier que :

$$p \leq n/2. \tag{53}$$

[42] Ainsi, il existe $\mathcal{V}$ tel que $(k_1, \dots, k_n) \in \mathcal{V}$ et $(l_1, \dots, l_n) \in \mathcal{V}$ si, et seulement si, ces deux n-uplets ont « les même indices de redondance ».

Remarque 2. Soit $V = \{V_1, \dots, V_p\}$. En utilisant les relations de commutation de base, on voit que pour tout n-uplet tel que $(k_1, \dots, k_n) \in \mathcal{V}$, la valeur $|\phi\left(b_{\psi(1)}^{(k_1)\#} \cdots b_{\psi(n)}^{(k_n)\#}\right)|$ est indépendante du $(k_1, \dots, k_n)$ considéré. On la note $m_{\mathcal{V}}$. Il vient alors :

$$\left| \frac{1}{N^{n/2}} \sum_{\substack{k_1,\dots,k_n=1 \\ (k_1,\dots,k_n)\in\mathcal{V}}}^{N} \phi\left(b_{\psi(1)}^{(k_1)\#} \cdots b_{\psi(n)}^{(k_n)\#}\right) \right| \leq \frac{1}{N^{n/2}} \sum_{\substack{k_1,\dots,k_n=1 \\ (k_1,\dots,k_n)\in\mathcal{V}}}^{N} m_{\mathcal{V}} = m_{\mathcal{V}} \frac{A_{p;N}}{N^{n/2}},$$

où $A_{p;N} := N(N-1)\cdots(N-p+1)$. Or quand $N \to +\infty$, $A_{p;N} \sim N^p$. On en déduit que pour $p < n/2$:

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{A_{p;N}}{N^{n/2}} = 0,$$

de sorte que :

$$\lim_{N\to+\infty} \left| \frac{1}{N^{n/2}} \sum_{\substack{k_1,\dots,k_n=1 \\ (k_1,\dots,k_n)\in\mathcal{V}}}^{N} \phi\left(b_{\psi(1)}^{(k_1)\#} \cdots b_{\psi(n)}^{(k_n)\#}\right) \right| = 0.$$

Compte tenu de (53), cela montre que seules les partitions vérifiant $p = n/2$ contribuent à la limite de M_N.

Cas 1 : n est impair. Alors $p < n/2$, ce qui donne, grâce à la remarque 2, l'équation (51).

Cas 2 : $n = 2r$ est pair. Grâce aux *remarques* 1 et 2, on écrit $\mathcal{V} = \{(e_1, z_1), \dots, (e_r, z_r)\}$.

Cas 2.1 : $\mathcal{V}$ est admissible. D'après la remarque 5.13, soit l tel que $z_l = e_l + 1$ et $\mathcal{V}\backslash(e_l, z_l)$ est admissible. Montrons que :

$$\phi\left(b_{\psi(1)}^{(k_1)\#} \cdots b_{\psi(n)}^{(k_n)\#}\right) = \phi\left(b_{\psi(e_1)}^{(k_{e_1})\#} b_{\psi(z_1)}^{(k_{z_1})\#}\right) \cdots \phi\left(b_{\psi(e_r)}^{(k_{e_r})\#} b_{\psi(z_r)}^{(k_{z_r})\#}\right). \tag{54}$$

Cas 2.1.1 : $\psi(e_l) = \psi(z_l)$. Dans ce cas, le bloc $b_{\psi(e_l)}^{(k_{e_l})\#} b_{\psi(z_l)}^{(k_{z_l})\#}$ commute avec tout le monde[43], et une récurrence nous montre que (54).

Cas 2.1.2 : $\psi(e_l) \neq \psi(z_l)$. Dans ce cas, la remarque 5.7 montre que les deux termes de l'équation (54) sont nuls.

Or d'après la remarque 5.7, l'expression de l'équation (54) est indépendante du choix du r-uplet $(k_1, \dots, k_n) \in \mathcal{V}$. Comme :

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{A_{n/2;N}}{N^{n/2}} = 1,$$

nous trouvons bien (52) dans le cas où $\mathcal{V}$ est admissible.

Cas 2.2 : $\mathcal{V}$ est non admissible. Cela signifie qu'il existe des inversions. Qu'à cela ne tienne ! En utilisant les relations de commutation de base, on enlève toutes les inversions en procédant de la manière suivante (notons que ce procédé est très proche de la démonstration de la proposition 2.27) :

[43] C'est pour cette raison que les $\mathcal{V}$ admissibles jouent un rôle particulier.

- S'il existe une inversion (j,l) (c'est-à-dire $e_j < e_l < z_j < z_l$, $j < l$), on considère une inversion $e_j < e_l < z_j < z_l$ telle que $|e_j - e_l|$ soit minimal[44]. En utilisant les relations de commutation, on échange successivement les termes en positions e_j et e_{j+1}, puis en positions e_{j+1} et e_{j+2}, et ce jusqu'à échanger les termes en positions e_{l-1} et e_l.
- Sinon, il n'y a plus d'inversions, et nous avons terminé.

On se retrouve alors avec une partition admissible $\mathcal{V}'$ et on peut appliquer le sous-cas précédent. Lorsque $\phi(\mathcal{V}')$ est non nul, les coefficients s_{ij}^{kl} qui apparaissent lors de ces échanges sont donnés par :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{N^{n/2}} \sum_{\substack{k_1,\dots,k_n=1 \\ (k_1,\dots,k_n)\in\mathcal{V}}}^{N} \phi\left(b_{\psi(1)}^{(k_1)\#}\cdots b_{\psi(n)}^{(k_n)\#}\right) &= \frac{1}{N^r} \sum_{\substack{k_1,\dots,k_{2r}=1 \\ (k_1,\dots,k_{2r})\in\mathcal{V}}}^{N} \left(\prod_{(i,j)\in\mathcal{I}(\mathcal{V})} s_{\psi(e_i),\psi(e_j)}^{k_{e_i},k_{e_j}} \right) \phi(\mathcal{V}') \\
&= \frac{1}{N^r} \sum_{\substack{k_1,\dots,k_r=1 \\ k_i\neq k_j \text{ si } i\neq j}} \left(\prod_{(i,j)\in\mathcal{I}(\mathcal{V})} s_{\psi(i),\psi(j)}^{k_i,k_j} \right) \phi(\mathcal{V}'),
\end{aligned}$$

où $\phi(\mathcal{V}')$ est donné par l'équation (54). Cette dernière expression tend vers $\phi(\mathcal{V}')t(\mathcal{V})$ lorsque N tend vers $+\infty$, ce qui conclut. ■

5.4 Preuve du résultat

Nous montrons maintenant qu'*il existe* un choix des nombres s_{ij}^{kl} de sorte que les limites définies dans l'équation (49) existent.

L'idée est la suivante : on tire les nombres s_{ij}^{kl} aléatoirement suivant une certaine loi. On montre alors que les limites définies dans l'équation (49) existent *presque sûrement*, ce qui démontre l'assertion précédente[45]. Nous rappelons d'abord un lemme qui nous sera fort utile.

Lemme 5.15. *Soit* $\{X_n; n\in\mathbb{N}\}$ *une suite de variables aléatoires d'espérances finies telle que* $\mathbb{E}[X_n]$ *converge (dans* $\mathbb{R}$*) quand* n *tend vers* $+\infty$*, vers une valeur notée* C*. On suppose que pour tout* $\epsilon > 0$ *:*

$$\lim_{N\to+\infty} \mathbb{P}\left(\{ \sup_{M\geq N} |X_M - \mathbb{E}[X_M]| \geq \epsilon \} \right) = 0.$$

alors :

$$p.s. \qquad \lim_{N\to+\infty} X_N = C.$$

Preuve. C'est classique. Rappelons que ce résultat est une conséquence du lemme de Borel-Cantelli. ■

Théorème 5.16. *Soient* $\{q_{ij}; i,j\in\mathbb{N}\}$ *des réels vérifiant* $-1\leq q_{ij} = q_{ji} \leq 1$*. Pour* $i,j,k,l\in\mathbb{N}$*, on choisit les facteurs de commutation* s_{ij}^{kl} *de manière* indépendante *sous les lois suivantes :*

$$\mathbb{P}\left(s_{ij}^{kl} = +1\right) = \frac{1+q_{ij}}{2}, \qquad \mathbb{P}\left(s_{ij}^{kl} = -1\right) = \frac{1-q_{ij}}{2}.$$

[44]Nous conseillons au lecteur de voir cet algorithme géométriquement.
[45]Bien évidemment, on ne connaît pas explicitement quel choix des facteurs s_{ij}^{kl} convient.

Alors pour $\mathcal{V} \in \mathcal{P}_2(1, \ldots, 2r)$, presque sûrement :

$$t(\mathcal{V})[\psi(1), \ldots, \psi(r)] = \prod_{(i,j)\in \mathcal{I}(\mathcal{V})} q_{\psi(i),\psi(j)}.$$

Précisons que Speicher ne fait pas la deuxième étape de la démonstration ci-dessous : il dit, à juste titre, qu'elle est très proche de celle du lemme 1 de [8]. Nous nous proposons donc de démontrer entièrement le théorème 5.16.

Preuve. Nous noterons $\mathbb{E}[X]$ l'espérance d'une variable aléatoire sous la mesure de probabilité $\mathbb{P}$. Soit $\mathcal{V} \in \mathcal{P}_2(1, \ldots, 2r)$.

Première étape. Posons :

$$X_N = \frac{1}{N^r} \sum_{\substack{k_1,\ldots,k_r=1 \\ k_i\neq k_j \text{ si } i\neq j}}^{N} \prod_{(i,j)\in \mathcal{I}(\mathcal{V})} s^{k_i,k_j}_{\psi(i),\psi(j)},$$

Or $\mathbb{E}[s^{kl}_{ij}] = (1 + q_{i,j})/2 - (1 - q_{i,j})/2 = q_{i,j}$. Par indépendance, on en tire :

$$\mathbb{E}[X_N] = \frac{1}{N^r} \sum_{\substack{k_1,\ldots,k_r=1 \\ k_i\neq k_j \text{ si } i\neq j}}^{N} \prod_{(i,j)\in \mathcal{I}(\mathcal{V})} q_{\psi(i),\psi(j)},$$

de sorte que :

$$\begin{aligned} \lim_{N\to+\infty} \mathbb{E}[X_N] &= \lim_{N\to+\infty} \frac{N(N-1)\cdots(N-r+1)}{N^r} \prod_{(i,j)\in \mathcal{I}(\mathcal{V})} q_{\psi(i),\psi(j)} \\ &= \prod_{(i,j)\in \mathcal{I}(\mathcal{V})} q_{\psi(i),\psi(j)}. \end{aligned}$$

Nous noterons cette valeur K dans la suite.

Deuxième étape. Montrons que les hypothèses du lemme 5.15 sont satisfaites. Soit $\epsilon > 0$. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebycheff, en notant $V[X_M] = \mathbb{E}[X_M^2] - \mathbb{E}[X_M]^2$ la variance de X_M :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\{\sup_{M\geq N} |X_M - \mathbb{E}[X_M]| \geq \epsilon\}\right) &\leq \sum_{M=N}^{\infty} \mathbb{P}\left(|X_M - \mathbb{E}[X_M]| \geq \frac{\epsilon}{2}\right) \\ &\leq \frac{4}{\epsilon^2} \sum_{M=N}^{\infty} V[X_M]. \end{aligned}$$

Il suffit donc de prouver que $\sum_{M\geq 0} V[X_M] < \infty$. Or :

$$V[X_M] = \frac{1}{M^{2r}} \sum_{\substack{k_1,\ldots,k_r=1 \\ k_i\neq k_j \text{ si } i\neq j}}^{M} \sum_{\substack{l_1,\ldots,l_r=1 \\ l_i\neq l_j \text{ si } i\neq j}}^{M} \left(\mathbb{E}\left[\prod_{(i,j)\in \mathcal{I}(\mathcal{V})} s^{k_i,k_j}_{\psi(i),\psi(j)} s^{l_i,l_j}_{\psi(i),\psi(j)} \right] - C^2 \right), \tag{55}$$

où :

$$C = \prod_{(i,j)\in \mathcal{I}(\mathcal{V})} q_{\psi(i),\psi(j)}.$$

Par indépendance, parmi les r-uplets $(k_1,\ldots,k_r)$ et $(l_1,\ldots,l_r)$ autorisés, seuls ceux qui vérifient $|\{k_1,\ldots,k_r\}\cap(l_1,\ldots,l_r)| \geq 2$ contribuent à la somme de droite de l'équation (55). Ainsi, le nombre de termes non nuls dans le terme de droite de (55) est au plus $M^n M^{n-2} = M^{2n-2}$. En définitive, il existe une constante Cte, indépendante de M, telle que pour tout M, $V[X_M] \leq \mathrm{Cte}/M^2$. On a bien :

$$\begin{aligned}\lim_{N\to+\infty} \mathbb{P}\left(\{\sup_{M\geq N} |X_M - \mathbb{E}[X_M]| \geq \epsilon\}\right) &\leq \lim_{N\to+\infty} \frac{4}{\epsilon^2}\sum_{M=N}^{\infty} \frac{\mathrm{Cte}}{M^2}\\ &= 0,\end{aligned}$$

ce qui conclut la démonstration du théorème. ∎

Le théorème suivant fait apparaître les relations de commutation canoniques déformées recherchées.

Théorème 5.17. *D'après le théorème 5.16, il existe des entiers s_{ij}^{kl} tels que pour tout $\mathcal{V} \in \mathcal{P}_2(1,\ldots,2r)$:*

$$t(\mathcal{V})[\psi(1),\ldots,\psi(r)] = \lim_{N\to+\infty}\frac{1}{N^r}\sum_{\substack{k_1,\ldots,k_r=1\\ k_i\neq k_j \text{ si } i\neq j}} \prod_{(i,j)\in\mathcal{I}(\mathcal{V})} s_{\psi(i),\psi(j)}^{k_i,k_j} = \prod_{(i,j)\in\mathcal{I}(\mathcal{V})} q_{\psi(i),\psi(j)}. \tag{56}$$

L'état ρ de la définition 5.8 vérifie donc les équations du théorème 5.12. Nous avons le résultat suivant :

(i) L'idéal bilatère $\mathcal{I}$ engendré par les relations de commutation (voir définition 2.7) :

$$R_{ij} = a_i a_j^* - q a_j^* a_i - \delta_{ij}$$

vérifie $\mathcal{I} \subset \operatorname{Ker}\rho$, où $\operatorname{Ker}\rho = \{x \in \mathcal{A} \mid \forall y \in A, \rho(y^*x) = 0\}$.

(ii) De plus :

$$\forall P \in \mathcal{A}, \qquad \rho(Pa_i) = 0. \tag{57}$$

Preuve. Commençons par (i).

(i) Par linéarité, il suffit de montrer que si P et Q sont des produits des générateurs a_i, a_i^*, alors[46] :

$$\rho(Pa_i a_j^* Q) = q_{ij}\rho(Pa_j^* a_i Q) + \delta_{ij}\rho(PQ). \tag{58}$$

Ceci est une conséquence des équations (52) et (56). En effet, il s'agit d'étudier tous les appariements possibles qui ne donnent en définitive que termes de la forme $\rho(a_i a_i^*)$. Pour $i \neq j$, les appariements de $Pa_i a_j^* Q$ et $Pa_j^* a_i Q$ sont les mêmes, mais avec une inversion supplémentaire qui fournit le terme q_{ij}. Pour $i = j$, on a simplement un appariement supplémentaire.

[46]Comparer (11) et (58). Ce n'est pas totalement étonnant, vu la démonstration du théorème 5.12.

(ii) La deuxième assertion découle des équations (47) et (43).

■

Nous en déduisons finalement :

Théorème 5.18. *Soient $\{q_{ij}; i,j \in \mathbb{N}\}$ des réels vérifiant $-1 \leq q_{ij} = q_{ji} \leq 1$. Il existe un espace de Hilbert $\mathcal{E}$ muni d'opérateurs $\{a_i, i \in \mathbb{N}\}$ définis sur un sous-espace dense de $\mathcal{E}$ et un vecteur $|0\rangle \in \mathcal{E}$ tels que les deux conditions suivantes soient vérifiées :*

$$\forall i, \forall j, \qquad a_i a_j^* - q a_j^* a_i = \delta_{ij}, \tag{59}$$

$$\forall i, \qquad a_i|0\rangle = 0 \tag{60}$$

Notons $B(x,y) = \rho(x^* y)$, qui est une forme positive sesquilinéaire à symétrie hermitienne d'après la remarque 5.6. Le théorème 5.18 est une conséquence de la propriété suivante.

Proposition 5.19. *Sur l'espace vectoriel $E = \mathcal{A}/\operatorname{Ker}(B)$, il existe un vecteur $|0\rangle$, des opérateurs*[47] *a_i, a_i^* et une forme sesquilinéaire hermitienne $\tilde{B}$ qui vérifient les propriétés suivantes :*

(i) pour tous i,j on a $a_i a_j^* - q a_j^* a_i = \delta_{ij}$,

(ii) pour tout i, $a_i|0\rangle = 0$,

(iii) la forme $\tilde{B}$ est à symétrie hermitienne,

(iv) et finalement pour tout i, a_i et a_i^* sont adjoints par rapport à $\tilde{B}$.

Preuve. C'est la même preuve que pour la proposition 2.17.

L'ensemble $E = \mathcal{A}/\operatorname{Ker}(B)$ hérite naturellement d'une structure de $\mathbb{C}$-espace vectoriel car $\operatorname{Ker}(B)$ est un sous-espace vectoriel de E. Nous noterons un élément de $\mathcal{A}$ sous la forme suivante : $\alpha|0\rangle$ où $\alpha \in \mathcal{A}$ est un représentant de la classe d'équivalence que l'on veut désigner. Démontrons les points de la proposition.

(i) La concaténation à gauche par les lettres est un opérateur linéaire sur $\mathcal{A}$. Les formules $B(m_1, a_i m_2) = B(a_i^* m_1, m_2)$ et $B(m_1, a_i^* m_2) = B(a_i m_1, m_2)$ montrent que $\operatorname{Ker}(B)$ est stable par concaténation à gauche : ainsi, les opérateurs a_i et a_i^* (de concaténation à gauche) passent au quotient en opérateurs sur E.

Vu que R_{ij} est un élément de l'idéal bilatère $\mathcal{I} \subset \operatorname{Ker}(B)$ (premier point du théorème 5.17), nos opérateurs a_i et a_j^* vérifient les relations de commutation $R_{ij} = 0$:

$$a_i a_j^* - q a_j^* a_i - \delta_{ij} = 0.$$

(ii) De plus, le vecteur $|0\rangle := e|0\rangle$ dans E est tel que $a_i(|0\rangle) = a_i|0\rangle = 0$ pour tout i d'après (57).

(iii) Intéressons-nous maintenant à la forme B : la forme B passe au quotient sur E en une forme sesquilinéaire, $\tilde{B}$. Vérifions qu'elle est à symétrie hermitienne : $\tilde{B}(m_1|0\rangle, m_2|0\rangle) = B(m_1, m_2) = \overline{B(m_2, m_1)} = \overline{\tilde{B}(m_2|0\rangle, m_1|0\rangle)}$.

(iv) En passant au quotient dans la relation pour tout v,w dans E, $B(v, a_i w) = B(a_i^* v, w)$, il vient que les opérateurs a_i et a_i^* sont adjoints par $\tilde{B}$.

■

Preuve du théorème 5.18. Il suffit de montrer que B est positive. Contrairement à la section 2, c'est trivial d'après la proposition 5.6. Comme précisé en introduction de cette partie, la positivité de B n'est pas difficile à obtenir : c'est son existence qui est délicate à démontrer.

Nous concluons alors comme dans la démonstration de la proposition 3.21.

[47] Notons le léger abus de notation qui identifie a_i avec son image dans le quotient.

6 Conclusions et perspectives

Nous avons ainsi étudié la question de la réalisation, dans un espace de Hilbert, des relations de commutation déformées $a_i a_j^* - q a_j^* a_i = \delta_{ij}$ en donnant quatre preuves d'existence. Bien que ces approches soient différentes au premier regard, signalons que ces démonstrations partagent les points communs suivants.

- Pour les trois premières preuves (sections 2,3 et 4), la *positivité* d'une forme sesquilinéaire hermitienne ou d'un opérateur était le point crucial de la démonstration (corollaire 2.40, propositions 3.18 ainsi que 3.19 et le théorème 4.17).
- Dans *toutes* les preuves, il a fallu transformer des expressions en utilisant les relations de commutation déformées et contrôler les termes qui en ressortaient. Autrement dit, des considérations *combinatoires* étaient cruciales. C'est ainsi que dans la section 2, nous avons obtenu un facteur $q^{\mathrm{Card}\{j\ ,\ i<j\ \ et \pi(i)>\pi(j)\}}$ (voir la démonstration de la proposition 2.27). Dans la section 3, ces considérations combinatoires sont intervenues dans la démonstration du lemme 3.12. Dans la section 4, celles-ci sont intervenues dans la preuve de la proposition 4.27 . Finalement, dans la section 5, la combinatoire des partitions était au cœur de la démonstration du théorème 5.12.

Pour conclure, signalons que les articles [5, 6] établissent un lien entre la réalisation des relations de commutation déformées et l'existence d'un mouvement Brownien généralisé non commutatif (au sens des probabilités non commutatives), appelé processus $q-$Gaussien. Suite à ces articles, cet objet a beaucoup été étudié, et la notion de « algèbre de Von Neumann q-déformée de Bozejko-Speicher » est apparue dans la littérature mathématique.

Remerciements

Nous tenons à vivement remercier Marc Rosso pour nous avoir proposé un sujet passionnant, pour la liberté d'exploration qu'il nous a laissée et bien sûr pour son talent artistique. Nous remercions aussi Mikael de la Salle pour les discussions fructueuses et OriaNe Blondel pour la relecture de ce mémoire.

Références

[1] U. Frisch, R. Bourret, Parastochastics, *J. Math. Phys.* **11**, 364-390 (1970).

[2] O. W. Greenberg, Particles with small violations of Fermi or Bose statistics, *Phys. Rev. D* **43**, 4111-4120 (1991).

[3] D. Fivel, Interpolation between Fermi and Bose statistics using generalized commutators, *Phys. Rev. Lett.* **65**, 3361-3364 (1990).

[4] D. Zagier, Realizability of a model in infinite statistics, *Comm. Math. Phys.* **147**, 199-210 (1992).

[5] M. Bozejko, R. Speicher, An example of a generalized Brownian motion, *Comm. Math. Phys.* **137**, 519-531 (1991).

[6] M. Bozejko, R. Speicher, Completely positive maps on Coxeter groups, deformed commutation relations, and operator spaces. *Math. Ann.* **300** 97-120 (1994).

[7] R. Speicher, Generalized Statistics of Macroscopic Fields. *Lett. Math. Phys.* **27**, 97-104 (1993).

[8] R. Speicher, A non-commutative central limit theorem, Math. Z. **209**, 55-66 (1992).

[9] N. Bourbaki, *Groupes et algebres de Lie* (Chapitres IV, V, VI), Hermann, Paris (1968).

[10] J. Humphreys, *Reflection groups and Coxeter groups*, Cambridge Press (1990).

[11] C. Cohen-Tanoudji, B. Diu, F. Laloë, *Mécanique Quantique, tome II*, Hermann, Paris (1973).

[12] G. Skandalis, *Examen M1 d'analyse complexe et de théorie spectrale*, ÉNS Ulm, non publié, 2004. `http://www.dma.ens.fr/~glass/ac/op.php?f=Exam`

[13] X. Gourdon, *Les maths en tête - Algèbre*, 1ère édition, Ellipses, 1994.